21 数学天元基金

当代数学园地 ⑨

完备李代数

孟道骥
朱林生　著
姜翠波







科学出版社
Science Press

当代数学园地 9

完备李代数

孟道骥　朱林生　姜翠波　著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书主要反映作者们对完备李代数系统化讨论所取得的主要结果. 这些结果包括完备李代数的基本性质、分解及其唯一性定理、同构定理以及完备李代数的结构的重要结论. 本书特点是指示了完备李代数与许多重要李代数(如半单李代数、可解李代数、幂零李代数以及 Kac-Moody 代数等)的关系,从而不仅可以发现而且可以构造完备李代数. 本书中还给出许多值得进一步探索研究的课题.

本书读者对象为高等院校数学系学生、研究生、教师及有关的研究人员.

图书在版编目(CIP)数据

完备李代数/孟道骥,朱林生,姜翠波著. －北京:科学出版社,2001

(当代数学园地 9/姜伯驹主编)

ISBN 7-03-008258-3

Ⅰ.完… Ⅱ.①孟…②朱…③姜… Ⅲ.李代数 Ⅳ.O162.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 01518 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2001 年 2 月第一次印刷 印张:4 3/8
印数:1－2 500 字数:108 000

定价:10.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

首先要说明的是本书的署名是以年龄大小为序的. 第一作者仅因年长几岁, 姜翠波排在最后, 因为她最年轻.

严志达院士生前对我们的研究给予了充分的理解、支持和帮助, 并为本书写了推荐. 但我们未能来得及将此书呈他审阅、批评、指正, 是我们的最大遗憾.

理解、支持和帮助我们从事完备李代数研究的还有陈省身、段学复、聂灵沼及万哲先等先生. 我们也从王叔平、许以超等先生及许多同行那里得到帮助. 因为有了这许多的帮助我们才能克服种种困难将研究工作持续到如今. 在此我们愿以此书向他们表示衷心的感谢.

目前越来越多的人, 特别是从事李代数研究的年轻人对完备李代数产生了兴趣, 希望对它作一个比较系统的介绍. 这本小册子如能对读者有所助益, 则是我们的最大满足. 这本书对我们来说, 不仅是对前一阶段工作的回顾, 也是一个再学习、再创造的过程. 我们对读者的希望, 则是多批评指正, 因为这是对我们的最大的帮助, 最大的促进.

国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金的资助, 科学出版社编辑先生的辛勤劳动也是作者要衷心感谢的. 我们还要感谢任斌先生和王立云女士在百忙中对书稿做了校对.

孟道骥

1999 年 10 月于南开大学

目　　录

引　论

如所周知，有限维李代数理论中，单 (或半单) 李代数，可解李代数和幂零李代数一直是人们关注的中心，而单 (半单) 李代数是了解得最透彻的.

最近 10 几年，完备李代数被越来越多的人所注意. 如果一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心为零 (即 $C(\mathfrak{g}) = \{0\}$)，所有导子都是内导子 (即 $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$)，则称为完备李代数 (complete Lie algebra). 完备李代数的概念来源于完备群的概念. 一个群称为完备群 (complete group)，如果其中心为幺元，所有自同构为内自同构. 完备群的概念出现于 30 年代，完备李代数的概念出现于 40 年代. 四五十年代，一些著名的李群李代数学者都对这类代数进行过研究，并将完备群的一些重要结果移植到完备李代数上. 特征零域上的半单李代数 (一般域上， Killing 型非退化的李代数) 是完备李代数. 除此之外，当时所知道的完备李代数寥寥无几，人们对完备李代数的重要性，以及对其本身的认识都很有限. 从 50 年代后半期到 80 年代的前半期，专门研究完备李代数的论文是非常少的. 由于李代数的导子代数和李代数的自同构群密切相关，因此导子代数一直是李代数理论中的一个重要课题. 许多有关完备李代数的结果隐藏在导子代数的课题之中. 从 80 年代的后半期完备李代数的研究又渐趋活跃，并取得一些有趣的结果.

在特征为零的域上，完备李代数包括了所有有限维的半单李代数，部分可解李代数，还有既非半单又非可解的李代数.

由于幂零李代数的中心非零，又有外导子，因而幂零李代数不是完备李代数. 虽然如此，完备李代数和幂零李代数仍有密不可分的关系. 事实上特征为零的域上的有限维完备李代数都是幂零李代数的全形的子代数.

域的特征为 $p(> 0)$ 与特征为零则有很大的不同. 此时有的单李代数不一定是完备李代数，当然 Killing 型非退化的单与半单李

代数仍然是完备李代数. 完备李代数是否为幂零李代数的全形也是不清楚的问题.

Killing-Cartan 定理指出特征为零的域上的有限维李代数是半单李代数的充分必要条件是它可以分解为单理想的直和, 而且除这些单理想的次序外, 这种分解是唯一的. 这个定理说明, 半单李代数的研究可归结为单李代数的研究. 这个定理的证明基于特征为零的域上的半单李代数的等价条件是其 Killing 型非退化.

Killing 型退化的李代数这种证明就行不通了. 特别特征为 $p(>0)$ 的域上的半单李代数就没有相应的定理, 因而, 域的特征为 $p(>0)$ 时, 半单李代数的研究不能归结为单李代数的研究.

在 80 年代后半期证明了: 无论域的特征为何, 有限维完备李代数都可以分解为单完备理想的直和, 而且除这些单完备理想的次序外, 这种分解是唯一的. 所谓单完备理想是指这些理想本身是单完备李代数, 而单完备李代数是不可分解的完备李代数, 或等价地说, 其非平凡理想都是不完备的. 这个结论说明, 完备李代数的研究可归结为单完备李代数的研究. 分解存在性的证明并不难. 利用李代数 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态的性质可以证明如果一个李代数的中心为零, 又分解为不可分解的理想的直和, 则这种分解除这些理想的次序外是唯一的. 将此结论用于完备李代数则为完备李代数的分解唯一性.

由完备李代数的分解及其唯一性的结论也可以导出特征为零的域上的半单李代数的分解唯一性.

特征为零的代数闭域上的完备李代数的 Levi 分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n},$$

这里 $\mathfrak{s}, \mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \mathfrak{n}$ 分别是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数, 根基和极大幂零理想.

不仅如此, 而且 $\mathfrak{n}$ 是约化李代数 $\mathfrak{s} + \mathfrak{a}$ 的模. 这个模当然是完全可约的. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数, 则 $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数. 此时 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ 的根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

这里 $\mathfrak{g}_\alpha$ 满足

$$[h+t,\ x]=\alpha(h+t)x,\quad \forall h+t\in\mathfrak{h}+\mathfrak{a},\ x\in\mathfrak{g}_\alpha.$$

我们可以看出，完备李代数的这种分解与半单李代数对 Cartan 子代数的根子空间分解极其相似. 也与半单李代数一样，可以由此分解得到完备李代数的许多精细的性质. 因此这是完备李代数中重要结果之一.

例如，虽然完备李代数的 Killing 型可能是退化的，但在极大环面上的限制是非退化的，可将极大环面与其对偶空间等同. Killing 型在根系生成的实空间上也是正定的. 也可利用这种正定性来判断完备李代数何时是单完备的.

由于完备李代数与其导子代数 (等于内导子代数) 同构，故完备李代数一定是代数李代数.

从这里我们可以看到，代数李代数理论，幂零李代数理论，约化李代数及其表示理论在完备李代数的研究之中都大有用武之地.

有一段时期完备李代数的发展处于停顿，当初所知道的半单李代数之外的完备李代数太少是原因之一. 随着李代数理论的发展，到 80 年代后半期，所知道的完备李代数日益增多，完备李代数的一般理论也就随着发展起来了.

首先，在 80 年代后半期知道了复半单李代数的 Borel 子代数和抛物子代数是完备李代数，而且它们为单完备李代数当且仅当它们是单李代数的 Borel 子代数和抛物子代数.

其次，从 90 年代初又有了一些构造完备李代数的方法. 如构造幂零根基为交换李代数，或交换李代数与 Heisenberg 代数的和的完备李代数，构造极大秩的可解完备李代数，构造某些非极大秩的可解完备李代数等等.

第三，从某些无限维李代数，如广义 Kac-Moody 代数及其子代数， Virasoro 代数等等也可以构造出完备李代数.

第四，由一些李代数的导子代数，全形，全形的导子代数等也可以得到完备李代数.

对完备李代数的研究也加深了对李代数理论的一些基本问题的理解. 例如，从完备李代数理论可以知道，任何有限维单李代数

的导子代数一定是单完备李代数. 在特征为 $p(>0)$ 的域上存在单李代数是非完备的. 但它的导子代数是单完备的, 还可以证明也是半单的, 当然不是单的. 特征为 $p(>0)$ 的域上半单李代数的研究不能归结为单李代数的研究.

总之, 完备李代数是李代数理论中一个内容非常丰富的分支, 也是一个重要的分支. 它的研究虽然取得了很多重要的成果, 但远远没有完成, 看来也不是短期就可以完成的. 然而可以预期今后在完备李代数的结构, 分类, 实现, 表示, 子代数等方面以及完备李代数与李群, 微分几何等分支的联系等方面都会有很大的发展.

本书我们以李代数知识为基础来介绍完备李代数, 也便更多的人可以阅读.

其实, 如果以代数群与代数李代数的观点研究完备李代数不仅可使许多证明简单得多, 而且可以得到更深刻更丰富的成果. 王叔平先生在此方面有独到的建树.

另外, 值得一提的是, 一些法国数学家, 如 E. Angelopoulos, S. Benayadi, G. Favre 和 R. Carles 等, 也对完备李代数作过不少研究. 不过, 他们主要对满足完满 (perfect) 条件

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$$

(即其导代数等于本身) 的完备李代数进行了讨论.

也有将李代数的上同调用于完备李代数的讨论的.

还有一些学者, 将完备李代数的一些概念、结果推广到李超代数上, 而得到完备李超代数的概念及相应的结果.

我们不想涉及这些内容, 有兴趣的读者可参阅书后相应的参考文献. 我们这本小册子只是向读者介绍完备李代数的一些基本的结果, 并不打算也不可能将完备李代数的所有结果都包括进去.

第一章　准备知识

本章论述研究完备李代数时经常用到，但并非在每本李代数的教科书上都可以找到的一些基本事实.

§1.1　李代数的 Levi 分解

以 $\mathfrak{r}$ 表示有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基，即 $\mathfrak{g}$ 的极大可解理想. 以 $\mathfrak{n}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想. 则以下一些结果成立.

(1)　若 $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{n}_1$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的可解，幂零理想，则 $\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}$.

(2)　若 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的真理想，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 为半单李代数当且仅当 $\mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{r}$.

特别，如果 $\mathfrak{g}$ 不是可解李代数，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的.

(3)　$\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的伴随模 $\mathfrak{g}$ 的子模，且

$$[\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n},\ [\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n}.$$

或者用模的语言，有 $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{n}$.

为方便起见，以下假定李代数 $\mathfrak{g}$ 的基域 $\mathbf{F}$ 的特征为零.

引理 1　设 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{r}$, 且 $\mathfrak{r}$ 为单 $\mathfrak{g}$ 模，则有 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$ 使得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{r}$$

为空间直和.

证　(1) 由于 $[\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}]$, $C(\mathfrak{g})$ 均为 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{r}$ 的子模，因而有 $[\mathfrak{r},\ \mathfrak{r}] = 0$, $C(\mathfrak{g}) = 0$ 或 $C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$. 当 $C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$ 时，$\dim \mathfrak{r} = 1$. 当 $\dim \mathfrak{r} > 1$ 时，$C(\mathfrak{g}) = 0$.

(2) 以 W 表示 $\mathfrak{g}$ 的所有线性变换构成的线性空间，则由下式

$$x \cdot A = (\mathrm{ad}x)A - A(\mathrm{ad}x),\ x \in \mathfrak{g},\ A \in W$$

定义的 $\mathfrak{g}$ 在 W 上的作用使 W 成为 $\mathfrak{g}$ 模，而且

$$\begin{aligned}
&P=\{\mathrm{ad}x|x\in\mathfrak{r}\},\\
&Q=\{A\in W|A(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{r},\ A|_{\mathfrak{r}}=0\},\\
&R=\{A\in W|A(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{r},\ A|_{\mathfrak{r}}=\lambda(A)\mathrm{id}_{\mathfrak{r}}\}
\end{aligned}$$

均为 W 的子模，且满足

$$P\subseteq Q\subset R,\ \dim R=\dim Q+1,\ \mathfrak{r}\cdot R\subseteq P.$$

(3) 由 (2) 中结果知， $\mathfrak{r}$ 在商模 R/P, Q/P 上的作用是平凡的. 因而可定义 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 在 R/P 与 Q/P 上的作用，使它们成为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 模. 由于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的，因而在 R/P 中有 Q/P 的一维补子模 $\mathbf{F}\bar{A}_0$, 这里 $A_0\in R$, $\lambda(A_0)\neq 0$, $\bar{A}_0$ 为 A_0 在商空间 R/P 中对应的元素. 于是 $\mathbf{F}\bar{A}_0$ 为平凡 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 模，也是平凡 $\mathfrak{g}$ 模. 即有

$$\mathfrak{g}\cdot A_0\subseteq P.$$

因而 $\mathfrak{g}\cdot A_0$ 为 P 的子模. 而且，易得

$$x\cdot A_0=-\lambda(A_0)\mathrm{ad}x,\ \forall x\in\mathfrak{r}.$$

于是

$$\mathfrak{g}\cdot A_0=P.$$

(4) 当 $C(\mathfrak{g})=0$ 时，易证 $\mathfrak{r}$, P 为同构的 $\mathfrak{g}$ 模，令

$$\mathfrak{s}=\{y\in\mathfrak{g}|y\cdot A_0=0\}.$$

显然 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数，而且

$$\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{r}=\dim\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=0.$$

于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}\simeq\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的.

当 $C(\mathfrak{g})\neq 0$ 时，此时 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$ 是 1 维的， $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{r}$ 均为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 模. 由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单，知有 $\mathfrak{r}$ 的补子模 $\mathfrak{s}$, 使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}$. 由

$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{g}=0$, 知 $\mathfrak{s}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 模, 即为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{r}$ 为理想直和. $\mathfrak{s}$ 是半单的. □

推论 若 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$, 则 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}],$$

其中 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单理想. □

定理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是非可解李代数, 则存在 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$ 使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r} \tag{1.1.1}$$

为空间直和分解.

证 若 $\mathfrak{r}$ 是单 $\mathfrak{g}$ 模时, 定理成立. 特别, $\dim\mathfrak{r}=1$ 时, 定理成立. 对 $\dim\mathfrak{r}$ 用归纳法.

若 $\mathfrak{r}$ 不是单 $\mathfrak{g}$ 模, 设 $\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{r}$ 的非平凡子模, 于是 $\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 且 $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_1$ 的根基. 注意到 $\dim\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1<\dim\mathfrak{r}$, 由此知有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_1$ 的半单子代数 $\bar{\mathfrak{s}}$ 使得

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}_1=\bar{\mathfrak{s}}\dot{+}\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1.$$

因而在 $\mathfrak{g}$ 中有唯一的子代数 $\mathfrak{g}_1$ 使得 $\mathfrak{g}_1\supseteq\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{r}_1=\bar{\mathfrak{s}}$. 这时 $\mathfrak{r}_1$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的根基. 由 $\dim\mathfrak{r}_1<\dim\mathfrak{r}$, 知有 $\mathfrak{g}_1$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$ 使得 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}_1$. 因而

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{r}.$$ □

$\mathfrak{g}$ 的分解 (1.1.1) 称为 **Levi 分解**, $\mathfrak{s}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Levi 子代数**.

以 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 表示李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群, $\mathfrak{A}$ 表示由

$$\{\exp\mathrm{ad}x|x\in\mathfrak{n}\}$$

生成的 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的子群, π 表示 $\mathfrak{g}$ 对于分解 (1.1.1), 在 $\mathfrak{s}$ 上的投影.

引理 3 设 $\mathfrak{s}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数, 则

$$\mathfrak{s}_1\subseteq\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{n},$$

且 $\pi(\mathfrak{s}_1)$ 与 $\mathfrak{s}_1$ 同构.

证 由于 $\mathfrak{s}_1$ 半单, 因而

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_1 &= [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1] \\ &\subseteq [\mathfrak{s}+\mathfrak{r}, \mathfrak{s}+\mathfrak{r}] \\ &= [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \\ &\subseteq \mathfrak{s}+\mathfrak{n}.\end{aligned}$$

显然, $\ker \pi|_{\mathfrak{s}_1} = \mathfrak{s}_1 \cap \ker \pi = \mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{r} = 0$. 故 $\pi|_{\mathfrak{s}_1}$ 是一一的. 而 π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{s}$ 上的同态映射, 因而 $\pi(\mathfrak{s}_1)$ 与 $\mathfrak{s}_1$ 是同构的. □

定理 4 设 $\mathfrak{s}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数. $\mathfrak{s}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个半单子代数, 则存在 $\theta \in \mathfrak{A}$ 使得

$$\theta(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}. \tag{1.1.2}$$

"$=$" 成立, 当且仅当 $\mathfrak{s}_1$ 也是 Levi 子代数.

证 我们用归纳法证明, 存在 $\theta \in \mathfrak{A}$ 使得

$$\theta(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s} + \mathfrak{n}^{(k)}.$$

约定 $\mathfrak{n}^{(0)} = \mathfrak{n}$. $k=0$ 时, 由引理 3 知结论成立. 设 k 时成立, 此时不妨设

$$\mathfrak{s}_1 \subseteq \mathfrak{s} + \mathfrak{n}^{(k)}.$$

仍以 π 表示 $\mathfrak{g}$ 关于分解 (1.1.1) 在 $\mathfrak{s}$ 上的投影, 于是由

$$x \cdot y = [\pi(x), y], \ x \in \mathfrak{s}_1, \ y \in \mathfrak{n}^{(k)}$$

定义的 $\mathfrak{s}_1$ 在 $\mathfrak{n}^{(k)}$ 上的作用使 $\mathfrak{n}^{(k)}$ 成为 $\mathfrak{s}_1$ 模. $\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 为子模. 且 $x - \pi(x) \in \mathfrak{n}^{(k)}$, $\forall x \in \mathfrak{s}_1$. 令 π_1 为 $\mathfrak{n}^{(k)}$ 到 $\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 上的自然映射. 于是

$$f(x) = \pi_1(x - \pi(x)), \ x \in \mathfrak{s}_1$$

为 $\mathfrak{s}_1$ 到 $\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 的线性映射，且满足

$$f([x,\ y]) = x \cdot f(y) - y \cdot f(x),\ \forall x,\ y \in \mathfrak{s}_1.$$

由 Whitehead 引理 ([28], p.77) 知有 $z \in \mathfrak{n}^{(k)}$ 使得

$$f(x) = x \cdot \pi_1(z),\ x \in \mathfrak{s}_1.$$

即

$$x - \pi(x) - [\pi(x),\ z] \in \mathfrak{n}^{(k+1)},\ \forall x \in \mathfrak{s}_1.$$

由 $z \in \mathfrak{n}^{(k)}$, 知 $\mathrm{ad}z$ 幂零， $\theta = \exp \mathrm{ad}z \in \mathfrak{A}$, 且

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= x + [z,\ \pi(x)] + [z,\ x - \pi(x)] + \frac{1}{2}[z,\ [z,\ x]] + \cdots \\
&\equiv \pi(x) + (x - \pi(x) - [\pi(x),\ z])\,(\mathrm{mod}\mathfrak{n}^{(k+1)}) \\
&\equiv \pi(x)\,(\mathrm{mod}\mathfrak{n}^{(k+1)}).
\end{aligned}$$

故 $\theta(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s} + \mathfrak{n}^{(k+1)}$.

由于 $\mathfrak{n}$ 是幂零的，故 k 充分大后 $\mathfrak{n}^{(k)} = 0$, 因而 $\theta(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}$.

由 (1.1.2) 及 Levi 子代数定义知 $\mathfrak{s}_1$ 为 Levi 子代数当且仅当 $\theta(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}$. □

此定理称为 Levi **子代数的共轭定理**, 即任何两个 Levi 子代数是共轭的.

$\mathfrak{g}$ 是特征零的代数闭域上的有限维李代数. 于是 $\mathfrak{g}$ 有 Levi 分解 (1.1.1).

$\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想 $\mathfrak{n}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **nil 根基** (见 [28]).

我们知道李代数 $\mathfrak{g}$ 的线性变换 D 若满足

$$D([x,\ y]) = [Dx,\ y] + [x,\ Dy],\ \forall x,\ y \in \mathfrak{g},$$

则称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **导子**. 所有导子的集合 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 构成一个李代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **导子代数**. 对于 $x \in \mathfrak{g}$, 决定 $\mathfrak{g}$ 的导子 $\mathrm{ad}x$ 如下:

$$\mathrm{ad}x(y) = [x,\ y],\ \forall y \in \mathfrak{g}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **内导子**. 所有内导子的集合 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. 而且

$$\mathrm{ad}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}).$$

定理 5 设李代数 $\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{g}_1$ 的理想; 又 $\mathfrak{r}, \mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基, nil 根基; $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{n}_1$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 根基, nil 根基. 则有以下结果.

(1) $\mathfrak{r} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}_1, \mathfrak{n} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{n}_1$;

(2) $\forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}, D(\mathfrak{r}) \subseteq \mathfrak{n}$.

证 见 [28] Ch Ⅲ, §6, 定理 7. □

从此定理, 可得 $\mathfrak{g}$ 的理想

$$\mathfrak{n}_0 = [\mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \ \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{n}. \tag{1.1.3}$$

称 $\mathfrak{n}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **幂零根基**(nilpotent radical) (见 [22]). 显然, $\mathfrak{n}_0$ 是 $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}]$ 的根基.

若 $\mathfrak{g}$ 是可解李代数, $\mathfrak{n}$ 为其 nil 根基. 则

$$D(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}, \forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}.$$

§1.2 李代数的导子代数

下面我们假定 $\mathfrak{g}$ 是有限维的, 而且其基域 $\mathbf{F}$ 的特征为零. 为证明简单起见, 进一步假设 $\mathbf{F}$ 是代数封闭的.

定理 1 设 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 则有

$$D = D_s + D_n,$$

这里 D_s, $D_n \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 且均为 D 的多项式, D_s 是半单的, D_n 是幂零的. 进一步, 若 $D = D_1 + D_2$, D_1, D_2 分别是半单的与幂零的, 且 $D_1D_2 = D_2D_1$, 则 $D_1 = D_s$, $D_2 = D_n$.

证 设 D 的最低多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

令 $f_i(\lambda)=f(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, 因而有 $g_i(\lambda)$ 使得

$$f_i(\lambda)g_i(\lambda)\equiv 1\,(\mathrm{mod}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}).$$

令

$$p(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i f_i(\lambda)g_i(\lambda),$$

$$q(\lambda)=\lambda-p(\lambda).$$

因而 $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}|(p(\lambda)-\lambda_i)$. 设 $\mathfrak{g}$ 对 D 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\lambda_1}(D)+\mathfrak{g}_{\lambda_2}(D)+\cdots+\mathfrak{g}_{\lambda_s}(D).$$

显然, 任何 $\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)$ 都是 $D_s=p(D)$, $D_n=q(D)$ 的不变子空间, 且 $(D_s-\lambda_i\mathrm{id})\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=0$. 故 D_s 是半单的. $D_n^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=(D-D_s)^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=(D-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=0$, 于是 D_n 是幂零的.

若 $D=D_1+D_2$, $D_1D_2=D_2D_1$, 则 D_1, D_2 都与 D 可换, 因而都与 D_s, D_n 可换, 故 $D_s-D_1=D_2-D_n$ 既是半单的, 又是幂零的. 于是 $D_1=D_s$, $D_2=D_n$.

由于 $D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 容易证明

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D),\ \mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)]\subseteq\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}(D).$$

若 $x\in\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)$, $y\in\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)$, 则有

$$D_s([x,\ y])=(\lambda_i+\lambda_j)[x,\ y]=[D_sx,\ y]+[x,\ D_sy].$$

于是 $D_s\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$, $D_n=D-D_s\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. □

为了进一步了解 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的结构, 需用下面定理.

定理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是线性变换构成的代数李代数. 又设 $\mathfrak{n}$ 是由幂零线性变换构成的极大理想, 则 $\mathfrak{g}$ 有空间直和分解:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n},$$

其中 $\mathfrak{a}$ 是由半单线性变换构成的交换子代数， $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数， $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]=0$, $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$.

证 见 [24], III, Ch.V, §4, Prop. 5. □

定理 3 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数，则 Der$\mathfrak{g}$ 有空间直和分解

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{a}\dot{+}\mathfrak{n}. \tag{1.2.1}$$

其中 $\mathfrak{s}$ 是 Der$\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数； $\mathfrak{a}$ 是由半单线性变换构成的交换子代数， $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}]=0$; $\mathfrak{n}$ 是由幂零线性变换构成的极大理想； $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ 是 Der$\mathfrak{g}$ 的根基 $\mathfrak{r}$.

证 其实 Der$\mathfrak{g}$ 是线性变换构成的代数李代数，由定理 2 知定理 3 成立. □

分解 (1.2.1) 称为 Der$\mathfrak{g}$ 的 **正规分解**.

推论 Der$\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 中任何元素 H 都是半单的.

证 事实上，由于 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{s}$ 模， $\mathfrak{s}$ 是半单的，故 H 为 $\mathfrak{g}$ 的半单线性变换. □

定义 1 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数. Der$\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{t}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 上的一个 **环面**, 如果 $\mathfrak{t}$ 是交换的，且其元素都是半单的.

定理 4 $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的极大环面，当且仅当存在 Der$\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数 $\mathfrak{s}$ 使得 $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数，且 Der$\mathfrak{g}$ 有正规分解

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r})\dot{+}\mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{t}=(\mathfrak{s}\cap\mathfrak{t})\dot{+}(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r}).$$

证 若 $\mathfrak{h}$ 为 (1.2.1) 中 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数，设 $\mathfrak{t}=\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$. 我们证明 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的极大环面. 设 D 为 $\mathfrak{g}$ 的一个半单导子，且 $[D, \mathfrak{t}]=0$, 由分解 (1.2.1) 有

$$D=D_1+D_2+D_3,\ D_1\in\mathfrak{s},\ D_2\in\mathfrak{a},\ D_3\in\mathfrak{n}.$$

设 $H_1\in\mathfrak{h}$, $H_2\in\mathfrak{a}$, 于是由 $[H_1+H_2, D]=0$ 知有 $[H_1, D_1]=0$. 故 $D_1\in\mathfrak{h}$, $[H_1+H_2, D_3]=0$. 而 $[D_1+D_2, D_3]=0$. 故

D_1+D_2, D_3 分别为 D 的半单与幂零部分, 但 D 是半单的. 故 $D_3=0$. 因而 $D\in\mathfrak{t}$, 即 $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的极大环面.

反之, 若 $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的极大环面, 则由 [33] 的推论 4.2 知有 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数 $\mathfrak{s}$ 使得 $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数.

$$\mathfrak{t}=(\mathfrak{s}\cap\mathfrak{t})+(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r}),$$

且

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dot{+}(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r})\dot{+}\mathfrak{n}$$

为正规分解. □

我们知道, 若 $\theta\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个极大环面, 则 $\theta\mathfrak{t}\theta^{-1}$ 也是一个极大环面. 可以证明, 若 $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ 都是 $\mathfrak{g}$ 上的极大环面, 则有 $\theta\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 使得 $\mathfrak{t}'=\theta\mathfrak{t}\theta^{-1}$.

定义 2 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的导子代数 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的正规分解 (1.2.1) 中 $\mathfrak{s}+\mathfrak{a}=0$, 即 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 中元素都是幂零的, 则称 $\mathfrak{g}$ 为 **特征幂零李代数**.

若 $\mathfrak{g}$ 为特征幂零李代数, 则 $\mathfrak{g}$ 必为幂零李代数, 因而 $C(\mathfrak{g})\neq 0$, $\mathrm{Der}\mathfrak{g}\neq\mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

例 1 设 $\mathfrak{g}$ 是 8 维李代数, 基 x_1, x_2, $\ldots$, x_8 满足下列关系:

$$\begin{array}{lll}
[x_1,\ x_2]=x_3, & [x_1,\ x_3]=x_4, & [x_1,\ x_4]=x_5,\\
[x_1,\ x_5]=x_6, & [x_1,\ x_6]=x_7, & [x_1,\ x_7]=x_8,\\
[x_2,\ x_3]=x_5, & [x_2,\ x_4]=x_6, & [x_2,\ x_5]=x_7,\\
[x_2,\ x_6]=2x_8, & [x_3,\ x_4]=-x_7+x_8, & [x_3,\ x_5]=-x_8.
\end{array}$$

及 $[x_i,\ x_j]=0$, 若 $i+j>8$.

则 $\mathfrak{g}$ 是特征幂零李代数 (见 [22]).

§1.3 李代数的扩张及全形

定义 1 设 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ 都是域 $\mathbf{F}$ 上的李代数. 若有 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{a}$ 同构, 而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{b}$ 同构, 即有短正合序列

$$0\longrightarrow\mathfrak{a}\longrightarrow\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{b}\longrightarrow 0,$$

则称 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{b}$ **通过** $\mathfrak{a}$ **的扩张**, $\mathfrak{n}$ 称为 **扩张核**. 若有 $\mathfrak{n}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补子空间为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想), 则称此扩张为 **非本质 (平凡) 扩张**. 若 $\mathfrak{n} \subseteq C(\mathfrak{g})$, 则称此扩张为 **中心扩张**.

定理 1 在李代数 $\mathfrak{g}$ 及其导子代数 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的直和

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\mathfrak{g} \dot{+} \mathfrak{g}$$

中定义括积运算如下

$$\begin{aligned}&[D_1 + x_1,\ D_2 + x_2] \\ =\ &[D_1,\ D_2] + D_1x_2 - D_2x_1 + [x_1,\ x_2], \\ &D_1,\ D_2 \in \mathrm{Der}\mathfrak{g},\ x_1,\ x_2 \in \mathfrak{g},\end{aligned}$$

其中等式右边 $[D_1,\ D_2]$, $[x_1,\ x_2]$ 分别为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 中括积. 则 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 为李代数, 且为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 通过 $\mathfrak{g}$ 的非本质扩张.

$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **全形**.

证 直接计算可验证 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 为李代数. 由于 $[\mathrm{Der}\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$, 故 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的理想, 而且 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的子代数, 故 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 通过 $\mathfrak{g}$ 的非本质扩张. □

例 设 $\mathfrak{a}$ 为交换李代数, 则 $\mathrm{Der}\mathfrak{a} = gl(\mathfrak{a})$. 于是 $\mathfrak{h}(\mathfrak{a}) = gl(\mathfrak{a}) \dot{+} \mathfrak{a}$.

若 $\mathfrak{d}$ 为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的子代数, 则 $\mathfrak{d} + \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的子代数, 且为 $\mathfrak{d}$ 通过 $\mathfrak{g}$ 的非本质扩张. 特别, $\mathfrak{d} = \mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的极大环面时, $\mathfrak{t} \dot{+} \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的子代数, 当 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数时, 这个李代数有较好的性质.

引理 2 设 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数. $\mathfrak{c}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 满足 $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \dot{+} [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$. 则 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{c}$ 生成, 且 $\mathfrak{g}$ 的极小生成元组所含元素个数为 $\dim \mathfrak{c}$.

证 设 V 为 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 令 $V^0 = V$, V^k 为 $[V,\ V^{k-1}]$ 生成的子空间. 由 $\mathfrak{g}$ 幂零, 故有 n 使得 $\mathfrak{g}^{n-1} \neq 0$, $\mathfrak{g}^n = 0$. 由于

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \dot{+} [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}] = \mathfrak{c} \dot{+} \mathfrak{g}^1,$$

则由归纳法可得

$$\mathfrak{g}^k = \mathfrak{c}^k + \mathfrak{g}^{k+1}.$$

因而 $\mathfrak{g}^{n-1}=\mathfrak{c}^{n-1}$. 再由归纳法可知

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{c}+\mathfrak{c}^1+\cdots+\mathfrak{c}^{n-1}.$$

即 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{c}$ 生成. 由于 $\mathfrak{c}\cap[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]=0$, 故 $\mathfrak{c}$ 的基为 $\mathfrak{g}$ 的极小生成元组. □

定理 3 设 $\mathfrak{n}$ 为特征为零的代数闭域上的幂零李代数, $\mathfrak{t}$ 为 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面. 则有以下结果:

(1) $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\dotplus\mathfrak{n}$ 为可解李代数;

(2) $\mathfrak{n}$ 对 $\mathfrak{t}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{n}=\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}^*}\mathfrak{n}_\alpha,$$

其中

$$\mathfrak{n}_\alpha=\{x\in\mathfrak{n}|[t,\ x]=\alpha(t)x,\ \forall t\in\mathfrak{t}\};$$

(3) 存在 $\mathfrak{n}$ 的极小生成元组 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 使得 $x_i\in\mathfrak{n}_{\alpha_i},\ 1\le i\le n$;

(4) 令 $\Delta=\{\alpha\in\mathfrak{t}^*|\mathfrak{n}_\alpha\ne0\}$, 则

$$\dim\mathfrak{t}=\operatorname{rank}\Delta\le\dim\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}]=n.$$

证 (1) 由于 $\mathfrak{t}$ 为 Der$\mathfrak{n}$ 的子代数, 故 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的子代数, 且 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 又 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}\simeq\mathfrak{t}$ 是交换的, 故 $\mathfrak{g}$ 为可解李代数.

(2) 由 $\mathfrak{t}$ 的定义知 (2) 成立.

(3) 显然 $\mathfrak{n}$ 是完全可约 $\mathfrak{t}$ 模, 而 $[\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}]$ 为子模, 故有子模 $\mathfrak{c}$ 使得 $\mathfrak{n}=\mathfrak{c}\dotplus[\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}]$. $\mathfrak{c}$ 也是完全可约 $\mathfrak{t}$ 模, 故有 $\mathfrak{c}$ 的基, 即 $\mathfrak{n}$ 的极小生成元组 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 使得 (3) 成立.

(4) 由于 $D,\ D_1\in$ Der$\mathfrak{n}$, 满足 $D_1=D$ 当且仅当 $D_1(x_i)=D(x_i),\ 1\le i\le n$. 于是 $T\in\mathfrak{t},\ T=0$ 当且仅当 $[T,\ x_i]=0,\ 1\le i\le n$. 因而

$$\dim\mathfrak{t}=\operatorname{rank}\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}=\operatorname{rank}\Delta\le n.$$

即 (4) 成立. □

我们称幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面 $\mathfrak{t}$ 的维数为 $\mathfrak{n}$ 的 **秩**. 当 $\dim \mathfrak{t} = \dim \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ 时, 称 $\mathfrak{n}$ 为 **极大秩幂零李代数**.

而满足 (3) 的极小生成元组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 称为 **对应极大环面 $\mathfrak{t}$ 的极小生成元组**, 简记为 t-msg (t-minimal set of generators).

§1.4 抛物子代数

定义 1 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解子代数 $\mathfrak{b}$ 不是 $\mathfrak{g}$ 的任何可解子代数的真子代数, 则称 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **极大可解子代数** 或 **Borel 子代数**. 若 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{p}$ 包含 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数, 则称 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **抛物子代数**.

自然, $\mathfrak{g}$ 及其 Borel 子代数都是 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数. 下面两个性质是很容易证明的.

(1) 若 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基, $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数, 则 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{r}$. 进而 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数之间有一一对应的关系.

(2) $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$, 其中 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数, 即 Borel 子代数是自正规的.

事实上, 若 $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}), x \notin \mathfrak{b}$, 则 $\mathfrak{b} + \mathbf{F}x$ 为可解李代数, 这与 $\mathfrak{b}$ 的极大可解性矛盾. □

以下我们假定 $\mathfrak{g}$ 的基域 $\mathbf{F}$ 是特征为零的代数闭域.

定义 2 设 $x \in \mathfrak{g}$, 若存在 $y \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbf{F}$, $\lambda \neq 0$, 及 $k \in \mathbf{N}$ 使得 $(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id})^k x = 0$, 则称 x 为 $\mathfrak{g}$ 的 **强 (ad) 幂零元**.

下面一些结果是很重要的 (见 [10, 27]).

(3) 若 x 为强幂零元, 则 $\mathrm{ad}x$ 是幂零的, 因而 $\exp \mathrm{ad}x$ 为 $\mathfrak{g}$ 的内自同构. 若以 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 表示由 $\{\exp \mathrm{ad}x | x$ 为强幂零元$\}$ 生成的 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的子群, 则 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的正规子群.

(4) $\mathfrak{g}$ 的 Borel (Cartan) 子代数在 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭. 即若 $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ ($\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$) 是 $\mathfrak{g}$ 的两个 Borel (Cartan) 子代数, 则有 $\sigma \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\sigma(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2$ ($\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$).

性质 4 称为 Borel (Cartan) 子代数的共轭性定理. 一般是先证明 Borel 子代数的共轭性与可解李代数的 Cartan 子代数的

共轭性. 然后证明一般李代数的 Cartan 子代数的共轭性. 详细的证明可参看 [10, 27].

由性质 1, 我们知道讨论一般李代数的抛物子代数只须讨论半单李代数的抛物子代数.

定理 1 设 $\mathfrak{p}$ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数, 则有 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 及 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的素根系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 的子集 Π_0 使得

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_+ \cup [\Pi_0]} \mathfrak{g}_\alpha.$$

其中

$$[\Pi_0] = \{\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \in \Delta | \text{若 } \alpha_i \notin \Pi_0, \text{ 则 } k_i = 0\},$$

这里 Δ, Δ_+ 分别为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系, 正根系.

证 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系, 正根系, 素根系分别记为 Δ, Δ_+, Π. 容易证明

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数. 由性质 4, 可设 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. 由此知

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_+$. 令

$$\Pi_0 = -(\Delta_1 \cap (-\Pi)).$$

于是 $-\Pi_0 \subseteq \Delta_1$, 因而 $[\Pi_0] \cap \Delta_- \subseteq \Delta_1 \cap \Delta_-$. 现设 $\alpha \in \Delta_1 \cap \Delta_-$, 于是

$$\alpha = -\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i, \ k_i \in \mathbb{Z}_+.$$

若 $ht(-\alpha)=1$, 显然 $\alpha\in[\Pi_0]\cap\Delta_-$. 假设 $ht(-\alpha)=k-1$ 时, $\alpha\in[\Pi_0]\cap\Delta_-$. 现设 $ht(-\alpha)=k$. 于是有 $\alpha_{i_0}\in\Pi$, $\beta\in\Delta_+$ 使得

$$-\alpha=\alpha_{i_0}+\beta,\ k_{i_0}\neq 0.$$

于是, 由 $\alpha\in\Delta_1$, α_{i_0}, $\beta\in\Delta_1$, 知

$$-\beta=\alpha+\alpha_{i_0}\in\Delta_1\cap\Delta_-,$$

$$ht(\beta)=k-1.$$

由于

$$-\beta=-\sum_{i\neq i_0}k_i\alpha_i-(k_{i_0}-1)\alpha_{i_0},$$

因而 $k_i\neq 0$, $\alpha_i\in\Pi_0$. 又

$$-\alpha_{i_0}=\alpha+\beta\in\Delta_1\cap\Delta_-.$$

于是 $\alpha\in[\Pi_0]\cap\Delta_-$. 至此知 $\Delta_1=[\Pi_0]\cup\Delta_+$. □

以后常将由 Π_0 确定的抛物子代数记为 $\mathfrak{p}_{[\Pi_0]}$. 在 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 共轭下, $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数总可以表示成这种形式. 当 $\Pi_0=\Pi$ 时, $\mathfrak{p}_{[\Pi]}=\mathfrak{g}$; $\Pi_0=\varnothing$ 时, $\mathfrak{p}_{[\Pi 0]}=\mathfrak{b}$ 为 Borel 子代数.

第二章　完备李代数的基本性质

本章论述完备李代数的定义，一些等价条件，特别是完备李代数的分解及其唯一性定理.

§2.1　导子塔定理

完备李代数概念的产生与完备群有密切的关系. 完备群理论中一个基本定理是自同构塔定理. 李代数理论中的导子塔定理类似于群论中的自同构塔定理. 本节讨论的李代数均是有限维的.

定义 1　设 $\mathfrak{a}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 一个子代数. 若有 $\mathfrak{g}$ 中序列

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \rhd \mathfrak{g}_2 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}_r = \mathfrak{a}, \tag{2.1.1}$$

即 $\mathfrak{g}_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的理想，则称 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 **次不变子代数**，记为 $\mathfrak{a} \lhd\lhd \mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g} \rhd\rhd \mathfrak{a}$.

引理 1　设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，且 $C(\mathfrak{g}) = 0$. 则 $C(\mathrm{Der}\mathfrak{g}) = 0$.

证　设 $D \in C(\mathrm{Der}\mathfrak{g})$. 于是

$$\mathrm{ad}Dx = [D,\ \mathrm{ad}x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}.$$

注意到，ad 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的同构映射，因而 $Dx = 0,\ \forall x \in \mathfrak{g}$. 于是 $D = 0$. □

由 $C(\mathfrak{g}) = 0$，可将 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 等同，即将 $\mathfrak{g}$ 作为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. 又 $\mathrm{C}(\mathrm{Der}\mathfrak{g}) = 0$，于是又可将 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 作为它的导子代数的理想，······. 于是我们可以给出下面的定义.

定义 2　设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，且 $C(\mathfrak{g}) = 0$. 令

$$\mathrm{Der}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g},$$

$$\mathrm{Der}^n\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathrm{Der}^{n-1}\mathfrak{g}),\ (n \geq 1). \tag{2.1.2}$$

则称序列

$$\mathfrak{g} \lhd \mathrm{Der}\mathfrak{g} \lhd \cdots \lhd \mathrm{Der}^n\mathfrak{g} \lhd \cdots \tag{2.1.3}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的 **导子塔**.

显然 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}$ 的次不变子代数.

引理 2 设 $\mathfrak{a}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的次不变子代数. 则有

(1) $\mathfrak{a}^\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 即

$$\mathfrak{a}^\omega \lhd \mathfrak{g}, \tag{2.1.4}$$

(2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\omega + \mathfrak{h}$, (2.1.5)

(3) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\omega + \mathfrak{h}_1$, (2.1.6)

这里 $\mathfrak{h}$ (相应 $\mathfrak{h}_1$) 是 $\mathfrak{g}$ (相应 $\mathfrak{a}$) 的幂零子代数.

证 (1) 因为 $\mathfrak{a} \lhd\lhd \mathfrak{g}$, 故有 $\mathfrak{g}$ 中序列使得 (2.1.1) 成立. 由此有

$$[\cdots[\mathfrak{g},\ \underbrace{\mathfrak{a}],\ \mathfrak{a}]\cdots,\ \mathfrak{a}]}_{r-1\ \text{个}} \subseteq \mathfrak{a}.$$

于是 $\forall k \in \mathbf{N}$, 可得

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g},\ \mathfrak{a}^\omega] &\subseteq [\mathfrak{g},\ \mathfrak{a}^{r+k-1}] \\ &\subseteq [\cdots[\mathfrak{g},\ \underbrace{\mathfrak{a}],\ \mathfrak{a}]\cdots,\ \mathfrak{a}]}_{r-1\ \text{个}}\ \underbrace{\mathfrak{a}],\ \cdots,\ \mathfrak{a}]}_{k\ \text{个}} \\ &\subseteq \mathfrak{a}^{k+1}.\end{aligned}$$

于是 (2.1.4) 成立.

(2) 若 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数, 则 $\mathfrak{g}^\omega = 0$, 故取 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, 则 (2.1.5) 成立. 一般, 可以对 $\dim \mathfrak{g}$ 用归纳法证明. 不妨设 $\mathfrak{g}$ 非幂零. 于是有 $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}x$ 非幂零. 于是 $\mathfrak{g}$ 有子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$$

使得 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ 都是 $\mathrm{ad}x$ 的不变子空间, 且 $\mathrm{ad}x$ 在它们上的限制分别是可逆、幂零的. 由于 $x \in \mathfrak{p}$, $\mathrm{ad}x$ 非幂零, 故 $\mathfrak{k} \neq 0$, $\mathfrak{p} \neq 0$. 而

且易证 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 由于 $\dim\mathfrak{p} < \dim\mathfrak{g}$, 故有 $\mathfrak{p}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 使得

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{\omega} + \mathfrak{h}.$$

然而 $\mathrm{ad}x(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, 故知 $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}^{\omega}$. 于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}^{\omega} + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\omega} + \mathfrak{h}.$$

(3) 结论 (3) 可由 (1), (2) 得出. □

引理 3 设 $\mathfrak{a}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的次不变子代数, 且

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = C(\mathfrak{g}) = (0). \tag{2.1.7}$$

则

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega}) = C(\mathfrak{a}^{\omega}). \tag{2.1.8}$$

证 首先证明 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ 时引理成立. 此时只要证明 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) \subseteq \mathrm{C}(\mathfrak{g}^{\omega})$, 或等价地证明

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) \subseteq \mathfrak{g}^{\omega}. \tag{2.1.9}$$

由引理 2, 有 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 使 (2.1.5) 成立. 令

$$\mathfrak{g}_1 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) + \mathfrak{h}. \tag{2.1.10}$$

由 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) \lhd \mathfrak{g}$, 故 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 因而再由引理 2, 有 $\mathfrak{g}_1$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}_1$, 使得

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^{\omega} + \mathfrak{h}_1.$$

因而 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\omega} + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^{\omega} + \mathfrak{g}_1^{\omega} + \mathfrak{h}_1$. 但 $\mathfrak{g}_1^{\omega} \subseteq \mathfrak{g}^{\omega}$, 故

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\omega} + \mathfrak{h}_1. \tag{2.1.11}$$

再证

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) \cap \mathfrak{h}_1 = 0. \tag{2.1.12}$$

由于 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})\lhd\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ 是幂零的,可归纳地证明 $\mathfrak{g}_1^{k+1}\subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})+\mathfrak{h}^{k+1}$, 故 $\mathfrak{g}_1^{\omega}\subseteq C(\mathfrak{g}^{\omega})$. 再由 (2.1.7) 与 (2.1.11) 知 $C(\mathfrak{h}_1)\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})=0$. 若 (2.1.12) 不成立, 由 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})\cap\mathfrak{h}_1\lhd\mathfrak{h}_1$ 及 $\mathfrak{h}_1$ 幂零, 知有 n 使

$$\mathfrak{b}=[\cdots[[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})\cap\mathfrak{h}_1,\ \underbrace{\mathfrak{h}_1],\ \mathfrak{h}_1],\ \cdots,\ \mathfrak{h}_1]}_{n-1\ 个}\neq 0.$$

但 $[\mathfrak{b},\ \mathfrak{h}_1]=0$. 于是 $\mathfrak{b}\subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})\cap C(\mathfrak{h}_1)=0$, 矛盾. 故 (2.1.12) 成立.

设 $x\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})$. 则有 $x^{\omega}\in\mathfrak{g}_1^{\omega}$, $x_1\in\mathfrak{h}_1$ 使得 $x=x^{\omega}+x_1$. 但 $x^{\omega}\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})$. 故 $x_1=x-x^{\omega}\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})\cap\mathfrak{h}_1=0$. 于是 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega})\subseteq\mathfrak{g}_1^{\omega}\subseteq\mathfrak{g}^{\omega}$. 故 (2.1.9) 成立.

现设 $\mathfrak{a}\lhd\lhd\mathfrak{g}$. 由 $C(\mathfrak{a})\subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})=0$, 于是

$$\mathfrak{a}\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})=C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}^{\omega})=C(\mathfrak{a}^{\omega})\subseteq\mathfrak{a}^{\omega}.$$

若 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})\nsubseteq\mathfrak{a}^{\omega}$, 则 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})\nsubseteq\mathfrak{a}$. 于是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{a}_1=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})+\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\lhd\lhd\mathfrak{a}_1$. 故 $N_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{a})\neq\mathfrak{a}$. 取 $y\in N_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{a})$, $y\notin\mathfrak{a}$. 则有

$$y=z+a,\ z\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega}),\ a\in\mathfrak{a}.$$

由此有 $z=y-a\in N_{\mathfrak{a}_1}(\mathfrak{a})$, $z\notin\mathfrak{a}$. 因而 $\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}+L(z)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 且 $\mathfrak{a}\lhd\mathfrak{a}_2$. 由 $[\mathfrak{a},\ z]\subseteq\mathfrak{a}\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})$ 知 $[\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_2]\subseteq\mathfrak{a}$. 一般, 由归纳法可得 $\mathfrak{a}_2^n\subseteq\mathfrak{a}^{n-1}$. 故

$$\mathfrak{a}_2^{\omega}\subseteq\mathfrak{a}^{\omega}. \tag{2.1.13}$$

进而知 $z\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})\cap\mathfrak{a}_2=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_2^{\omega})\cap\mathfrak{a}_2=C_{\mathfrak{a}_2}(\mathfrak{a}_2^{\omega})$. 由 $z\notin\mathfrak{a}$, 故 $z\notin\mathfrak{a}^{\omega}=\mathfrak{a}_2^{\omega}$. 因而 $C_{\mathfrak{a}_2}(\mathfrak{a}_2^{\omega})\neq C(\mathfrak{a}_2^{\omega})$. 故 $C(\mathfrak{a}_2)\neq 0$. 但 $C(\mathfrak{a}_2)\subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})=0$. 这个矛盾导出 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\omega})\subseteq\mathfrak{a}^{\omega}$, 因此引理成立. □

引理 4 设 $\mathfrak{b}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的次不变子代数, $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{b}$ 的理想, 即

$$\mathfrak{a}\lhd\mathfrak{b}\lhd\lhd\mathfrak{g}, \tag{2.1.14}$$

而且

$$C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = 0. \tag{2.1.15}$$

则

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = 0. \tag{2.1.16}$$

证 由 (2.1.14) 知有中序列

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \rhd \mathfrak{g}_2 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{g}_{r-1} = \mathfrak{b} \rhd \mathfrak{g}_r = \mathfrak{a}.$$

$r = 1$, 2 时, 引理显然成立. 设 $r = 3$, 即

$$\mathfrak{g} \rhd \mathfrak{b} \rhd \mathfrak{a}.$$

故有 $[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$ 及

$$\begin{aligned}
&[[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{b}],\ \mathfrak{a}] \\
\subseteq &[[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a}],\ \mathfrak{b}] + [C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ [\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}]] \\
= &0,
\end{aligned}$$

因而

$$[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{b}] \subseteq C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = 0.$$

故

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = 0.$$

一般, 由归纳假设, 因 $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{b} \lhd\lhd \mathfrak{g}_2$, $C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = 0$ 及 $C_{\mathfrak{g}_2}(\mathfrak{b}) \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = 0$, 有

$$C_{\mathfrak{g}_2}(\mathfrak{a}) = 0.$$

于是由

$$\begin{aligned}
&[[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{b}],\ \mathfrak{a}] \\
\subseteq &[[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a}],\ \mathfrak{b}] + [C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ [\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}]] \\
\subseteq &[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a}] \\
= &0,
\end{aligned}$$

有

$$[\mathfrak{b},\ C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})] \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}).$$

但是

$$\mathfrak{b} \lhd \lhd \mathfrak{g}_2 \lhd \mathfrak{g},$$

所以

$$[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{b}] \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{g}_2 = C_{\mathfrak{g}_2}(\mathfrak{a}) = 0.$$

这就意味着

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = 0. \qquad \square$$

推论 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，且 $C(\mathfrak{g}) = 0$. 则在 $\mathfrak{g}$ 的导子塔

$$\mathfrak{g} \lhd \mathrm{Der}\mathfrak{g} \lhd \cdots \lhd \mathrm{Der}^n\mathfrak{g} \lhd \cdots$$

中对任何 n 有

$$C_{\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = 0. \tag{2.1.17}$$

证 由 $C_{\mathrm{Der}\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \subseteq gl(\mathfrak{g})$ 及 $C_{\mathrm{Der}\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \cap gl(\mathfrak{g}) = 0$ 知 (2.1.17) 在 $n = 1$ 时成立. 对 n 作归纳，可设 (2.1.17) 对 n 成立. 于是由引理 4 知 (2.1.17) 对 $n+1$ 成立. $\square$

定理 5 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，$C(\mathfrak{g}) = 0$. 则 $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\dim \mathrm{Der}^n\mathfrak{g} \leq \dim C(\mathfrak{g}^\omega) + \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega. \tag{2.1.18}$$

进而，存在 m 使得

$$\mathrm{Der}^m\mathfrak{g} = \mathrm{Der}^{m+1}\mathfrak{g} = \cdots. \tag{2.1.19}$$

证 由于 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}$ 中是次不变的，于是由引理 2 知 $\mathfrak{g}^\omega \lhd \mathrm{Der}^n\mathfrak{g}$, 由引理 4 的推论知 $C_{\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = 0$. 故由引理 3 知

$$C_{\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\omega) = C(\mathfrak{g}^\omega). \tag{2.1.20}$$

对任一 $x \in \mathrm{Der}^n\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^\omega \lhd \mathrm{Der}^n\mathfrak{g}$ 推出 $\mathrm{ad}x$ 在 $\mathfrak{g}^\omega$ 上的限制 $\mathrm{ad}x|_{\mathfrak{g}^\omega}$ 是 $\mathfrak{g}^\omega$ 的导子. 由下式

$$\pi(x) = \mathrm{ad}x|_{\mathfrak{g}^\omega}$$

定义的映射 π 是 $\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega$ 的同态. 由

$$\begin{aligned}\ker\pi &= \{\, x\in \mathrm{Der}^n\mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}x|_{\mathfrak{g}^\omega}=0\,\}\\ &= C_{\mathrm{Der}^n\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\omega)\\ &= C(\mathfrak{g}^\omega)\end{aligned}$$

知 (2.1.18) 成立.

又由 $\mathfrak{g}$ 的维数是有限的, 故 (2.1.18) 的右面是有限的. 因而由 (2.1.18) 知有 $m\in\mathbf{N}$ 使 (2.1.19) 成立. □

注 此定理称为 **导子塔定理**, 是 Schenkman 在 1951 年得到的 (见 [45]).

§2.2 完备李代数

在上节我们看到在中心平凡的李代数 $\mathfrak{g}$ 的导子塔中实际只有有限项. 即有 m 使 (2.1.19) 成立. 容易看出此时 $\mathrm{Der}^m\mathfrak{g}$ 的中心是平凡的, 它的导子都是内导子. 与群论中完备群的概念相类比, 自然会引进下面的定义.

定义 1 李代数 $\mathfrak{g}$ 称为完备李代数, 如果它满足

(1) $C(\mathfrak{g})=0,$ (2.2.1)

(2) $\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathrm{ad}\mathfrak{g}.$ (2.2.2)

例 1 特征零域上的半单李代数是完备李代数.

例 2 设 $\mathfrak{g}$ 是中心平凡的有限维李代数. 则存在 $m\in\mathbf{N}$ 使 $\mathrm{Der}^m\mathfrak{g}$ 完备李代数.

例 3 2 维非交换李代数是完备李代数 (见 [28]).

在完备李代数的定义中的两个条件是相互独立的.

例 4 设 V 是特征零域上的 n 维线性空间. $sl(V)$ 是 V 的迹为零的线性变换的李代数. 在 $\mathfrak{g}=sl(V)\dot{+}V$ 中定义括积:

$$[A_1+v_1,\ A_2+v_2]=A_1A_2-A_2A_1+A_1v_2-A_2v_1,$$
$$A_1,\ A_2\in sl(V);\ v_1,\ v_2\in V.$$

则 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数. 易证 $C(\mathfrak{g})=0$. 而由公式

$$D(A+v)=v,\ \forall A\in sl(V),\ v\in V$$

所定义的 D 是 $\mathfrak{g}$ 的外导子.

例 5 设 $\mathfrak{n}$ 是由 x_1, x_2, x_3, x_4 生成的 38 维李代数, 记 $U = L(x_1, x_2, x_3, x_4)$. $\mathfrak{n}$ 的乘法表如下:

$$
\begin{array}{lll}
[x_1, x_2] = x_5 & [x_1, x_4] = x_7 & [x_2, x_4] = x_8 \\
[x_1, x_3] = x_6 & [x_2, x_3] = x_7 - x_5 & [x_3, x_4] = x_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
[x_1, x_6] = x_9 & [x_2, x_7] = x_{11} & [x_3, x_8] = x_{15} \\
[x_1, x_7] = x_{10} & [x_2, x_8] = x_{12} & [x_4, x_6] = x_{14} \\
[x_1, x_8] = x_{11} & [x_3, x_6] = x_{13} & [x_4, x_7] = x_{15} \\
[x_2, x_6] = x_{10} & [x_3, x_7] = x_{14} & [x_4, x_8] = x_{16}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
[x_1, x_9] = x_{17} & [x_2, x_{11}] = x_{20} & [x_4, x_{13}] = 30x_{35} \\
[x_1, x_{10}] = x_{18} & [x_2, x_{12}] = x_{21} & [x_4, x_{14}] = 20x_{36} \\
[x_1, x_{11}] = x_{19} & [x_3, x_{13}] = 60x_{34} & [x_4, x_{15}] = 15x_{37} \\
[x_1, x_{12}] = x_{20} & [x_3, x_{14}] = 30x_{35} & [x_4, x_{16}] = 12x_{38} \\
[x_2, x_9] = x_{18} & [x_3, x_{15}] = 20x_{36} & \\
[x_2, x_{10}] = x_{19} & [x_3, x_{16}] = 15x_{37} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
[x_1, x_{17}] = x_{22} & [x_3, x_{18}] = x_{29} & [x_6, x_{11}] = -x_{30} \\
[x_1, x_{18}] = x_{23} & [x_3, x_{19}] = x_{30} & [x_6, x_{12}] = -x_{31} \\
[x_1, x_{19}] = x_{24} & [x_3, x_{20}] = x_{31} & [x_7, x_9] = -x_{29} \\
[x_1, x_{20}] = x_{25} & [x_3, x_{21}] = x_{32} & [x_7, x_{10}] = -x_{30} \\
[x_1, x_{21}] = x_{26} & [x_4, x_{17}] = x_{29} & [x_7, x_{11}] = -x_{31} \\
[x_2, x_{17}] = x_{23} & [x_4, x_{18}] = x_{30} & [x_7, x_{12}] = -x_{32} \\
[x_2, x_{18}] = x_{24} & [x_4, x_{19}] = x_{31} & [x_8, x_9] = -x_{30} \\
[x_2, x_{19}] = x_{25} & [x_4, x_{20}] = x_{32} & [x_8, x_{10}] = -x_{31} \\
[x_2, x_{20}] = x_{26} & [x_4, x_{21}] = x_{33} & [x_8, x_{11}] = -x_{32} \\
[x_2, x_{21}] = x_{27} & [x_6, x_9] = -x_{28} & [x_8, x_{12}] = -x_{33} \\
[x_3, x_{17}] = x_{28} & [x_6, x_{10}] = -x_{29} &
\end{array}
$$

$[x_1, x_{29}] = x_{34}$ $[x_1, x_{30}] = x_{35}$ $[x_1, x_{31}] = x_{36}$ $[x_1, x_{32}] = x_{37}$ $[x_1, x_{33}] = x_{38}$ $[x_2, x_{28}] = -5x_{34}$ $[x_2, x_{29}] = -2x_{35}$ $[x_2, x_{30}] = -x_{36}$ $[x_2, x_{31}] = -\frac{1}{2}x_{37}$ $[x_2, x_{32}] = -\frac{1}{5}x_{38}$ $[x_3, x_{23}] = -x_{34}$ $[x_3, x_{24}] = -x_{35}$ $[x_3, x_{25}] = -x_{36}$

$[x_3, x_{26}] = -x_{37}$ $[x_3, x_{27}] = -x_{38}$ $[x_4, x_{22}] = 5x_{34}$ $[x_4, x_{23}] = 2x_{35}$ $[x_4, x_{24}] = x_{36}$ $[x_4, x_{25}] = \frac{1}{2}x_{37}$ $[x_4, x_{26}] = \frac{1}{5}x_{38}$ $[x_6, x_{18}] = 2x_{34}$ $[x_6, x_{19}] = 2x_{35}$ $[x_6, x_{20}] = 2x_{36}$ $[x_6, x_{21}] = 2x_{37}$ $[x_7, x_{17}] = -4x_{34}$ $[x_7, x_{18}] = -x_{35}$

$[x_7, x_{20}] = \frac{1}{2}x_{37}$ $[x_7, x_{21}] = \frac{4}{5}x_{38}$ $[x_8, x_{17}] = -4x_{35}$ $[x_8, x_{18}] = -2x_{36}$ $[x_8, x_{19}] = -x_{37}$ $[x_8, x_{20}] = -\frac{2}{5}x_{38}$ $[x_9, x_{10}] = -3x_{34}$ $[x_9, x_{11}] = -3x_{35}$ $[x_9, x_{12}] = -3x_{36}$ $[x_{10}, x_{11}] = -x_{36}$ $[x_{10}, x_{12}] = -\frac{3}{2}x_{37}$ $[x_{11}, x_{12}] = -\frac{3}{5}x_{38}$

$$U^7 = 0 \qquad [U^2, U^2] = 0 \qquad [x_5, \mathfrak{n}] = 0$$

有 $s_0, s_1, s_2 \in \mathrm{Der}\mathfrak{n}$, 且 $s_i(U) = U$. $s_i|_U$ 在 x_1, x_2, x_3, x_4 下的矩阵为准对角矩阵:

$$s_0 = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$s_1 = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$s_2 = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

于是 $\mathfrak{s} = L(s_0, s_1, s_2)$ 是三维单李代数. 而

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{n}$$

是 41 维李代数, 满足

(1) $C(\mathfrak{g}) = L(x_5) \neq 0$,

(2) $\text{Der}\mathfrak{g} = \text{ad}\mathfrak{g}$. 详细的证明可见 [43]. □

为了讨论完备李代数的性质，我们先给出下面的引理.

引理 1 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的全形. 则

(1) $C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) = \{x - \text{ad}x | x \in \mathfrak{g}\}$, (2.2.3)

(2) $\mathfrak{g} \cap C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{g})$, (2.2.4)

(3) $\theta(x+D) = \text{ad}x - x + D,\ x \in \mathfrak{g},\ D \in \text{Der}\mathfrak{g}$ (2.2.5)

所定义的映射 θ 是 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的对合自同构，满足

$$\theta(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}). \tag{2.2.6}$$

证 (1) 设 $x \in \mathfrak{g}$, $D \in \text{Der}\mathfrak{g}$. 则 $x + D \in C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g})$ 当且仅当对任何 $y \in \mathfrak{g}$ 有

$$0 = [x + D, y] = [x, y] + Dy = (\text{ad}x + D)y,$$

即

$$D = -\text{ad}x.$$

所以 (2.2.3) 成立.

(2) 设 $h \in \mathfrak{g} \cap C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g})$. 则从 (2.2.3) 有 $x \in \mathfrak{g}$ 使得 $h = x - \text{ad}x$. 但是 $h - x \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}x \in \text{Der}\mathfrak{g}$, 所以我们有 $\text{ad}x = 0$, $h = x \in C(\mathfrak{g})$. 反之，若 $x \in C(\mathfrak{g})$, 则 $\text{ad}x = 0$. 故 $x = x - \text{ad}x \in C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}$. (2.2.4) 成立.

(3) 显然 θ 是 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 到 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的线性映射. 因为

$$\theta^2(x+D) = \theta(\text{ad}x - x + D) = \text{ad}(-x) + x + \text{ad}x + D = x + D,$$

所以

$$\theta^2 = \text{id}. \tag{2.2.7}$$

对任何 $x \in \mathfrak{g}$, 用 (2.2.5) 和 (2.2.4) 可得

$$\theta(x) = \text{ad}x - x \in C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}),$$

即

$$\theta(\mathfrak{g}) \subseteq C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}).$$

另一方面，对 $x \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\theta(\mathrm{ad}x - x) = \mathrm{ad}(-x) + x + \mathrm{ad}x = x \in \mathfrak{g}.$$

因而 (2.2.6) 成立.

最后，我们证明 $\theta \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 注意到

$$\begin{aligned}
&[\theta(x+D), \theta(y+E)] \\
=&[\mathrm{ad}x - x + D, \mathrm{ad}y - y + E] \\
=& -([x,y] + Dy - Ex) + \mathrm{ad}[x,y] \\
&+ \mathrm{ad}(Dy) - \mathrm{ad}(Ex) + [D,E] \\
=&\theta([x,y] + Dy - Ex + [D,E]) \\
=&\theta([x+D, y+E]), \\
&\forall x,\ y \in \mathfrak{g};\ D,\ E \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

因此，定理证毕. □

定理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数. 则下面条件等价.

(1) $\mathfrak{g}$ 是完备李代数.

(2) 通过 $\mathfrak{g}$ 的任一扩张 $\mathfrak{a}$ 均是平凡扩张，且

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \oplus C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}). \tag{2.2.8}$$

(3) $\mathfrak{g}$ 的全形 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 有分解

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}). \tag{2.2.9}$$

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $\mathfrak{a}$ 是通过 $\mathfrak{g}$ 的一个扩张. 则 $\mathfrak{g} \lhd \mathfrak{a}$，因而 $C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}) \lhd \mathfrak{a}$. 从 $C(\mathfrak{g}) = 0$，知 $\mathfrak{g} \cap C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}) = 0$. 设 $x \in \mathfrak{a}$. 则从 $\mathrm{ad}x(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ 我们知道 $\mathrm{ad}x$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的限制 $\mathrm{ad}x|_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的导子. 但是 $\mathfrak{g}$ 完备的，故 $\mathrm{ad}x|_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的内导子. 于是由

$$\pi(x) = \mathrm{ad}x|_{\mathfrak{g}},\ x \in \mathfrak{a}$$

定义的 π 是 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 上的映射，核为

$$\ker \pi = C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}).$$

因此

$$\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g} + \dim C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}).$$

所以 (2.2.9) 成立.

(2)$\Longrightarrow$ (3) 若令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}(\mathfrak{g})$. 很清楚条件 2) 推出条件 3).

(3)$\Longrightarrow$ (1) 从 (2.2.9) 和 (2.2.4), 我们有

$$C(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \cap C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) = 0.$$

又从 (2.2.9) 和 (2.2.2), 我们还有

$$C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{h}(\mathfrak{g})/\mathfrak{g} \simeq \mathrm{Der}\mathfrak{g}.$$

再由 (2.2.5) 定义的 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ 的自同构 θ, 可得

$$C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}.$$

但 $C(\mathfrak{g}) = 0$ 导出 $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}\ \mathfrak{g}$. 因此

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}.$$

故 $\mathfrak{g}$ 是完备的. □

§2.3 完备李代数的分解及其唯一性

本节我们将讨论完备李代数的分解及分解的唯一性. 为了叙述方便，我们还将引进单完备李代数的概念.

引理 1 设李代数 $\mathfrak{g}$ 分解为两个理想的直和，即

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2. \tag{2.3.1}$$

则有

(1) $C(\mathfrak{g})$ 有分解

$$C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{a}_1) \oplus C(\mathfrak{a}_2). \tag{2.3.2}$$

(2) 若还有 $C(\mathfrak{g}) = (0)$. 则

$$\mathrm{ad}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{a}_1 \oplus \mathrm{ad}\mathfrak{a}_2, \tag{2.3.3}$$

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2. \tag{2.3.4}$$

(3) $\mathfrak{g}$ 完备当且仅当 $\mathfrak{a}_1$ 与 $\mathfrak{a}_2$ 都完备.

证 (1) 因为 $C(\mathfrak{a}_1) \cap C(\mathfrak{a}_2) = 0$ 和 $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] = 0$, 所以

$$C(\mathfrak{a}_1) \oplus C(\mathfrak{a}_2) \subseteq C(\mathfrak{g}).$$

现设 $x \in C(\mathfrak{g})$ 以及 $x = x_1 + x_2$, $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2$. 我们有

$$[x_1, \mathfrak{a}_1] = [x - x_2, \mathfrak{a}_1] = 0.$$

故 $x_1 \in C(\mathfrak{a}_1)$. 类似地 $x_2 \in C(\mathfrak{a}_2)$. 因而 (2.3.2) 成立.

(2) 对 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1$, 将其扩充为 $\mathfrak{g}$ 的线性变换如下:

$$D(x_1 + x_2) = Dx_1, \forall x_1 \in \mathfrak{a}_1, x_2 \in \mathfrak{a}_2.$$

显然, $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 这样可认为 $\mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 很清楚 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1$ 当且仅当 $Dx_2 = 0$, $\forall x_2 \in \mathfrak{a}_2$. 类似地, $\mathrm{Der}\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 而且 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2$ 当且仅当 $Dx_1 = 0$, $\forall x_1 \in \mathfrak{a}_1$. 因而我们有

$$\mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 + \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathrm{Der}\mathfrak{g},$$

及

$$\mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \cap \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2 = 0.$$

现证对 $i = 1, 2$.

$$D(\mathfrak{a}_i) \subseteq \mathfrak{a}_i, \quad \forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}. \tag{2.3.5}$$

设 $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $i=1,2$. 则

$$\begin{aligned}[Dx_1,\ x_2] &= D([x_1,\ x_2]) - [x_1,\ Dx_2] \\ &= -[x_1,\ Dx_2] \\ &\in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \\ &= (0),\end{aligned}$$

即

$$[Dx_1,\ x_2] = [x_1,\ Dx_2] = 0.$$

从 $C(\mathfrak{g})=0$, 及 (2.3.2) 得 $C(\mathfrak{a}_1)=C(\mathfrak{a}_2)=0$. 故 $Dx_i \in \mathfrak{a}_i$, $i=1,2$.

我们用 (2.3.5) 证明 $\mathrm{Der}\mathfrak{a}_i \lhd \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 设 $D_1 \in \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1$, $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 和 $x_2 \in \mathfrak{a}_2$. 于是

$$[D,\ D_1](x_2) = DD_1(x_2) - D_1D(x_2) = 0,$$

所以 $\mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \lhd \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 类似 $\mathrm{Der}\mathfrak{a}_2 \lhd \mathrm{Der}\mathfrak{g}$.

最后, 我们证明 $\mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 + \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2 = \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 事实上, 若 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$, 令 $x = x_1 + x_2$, $x_i \in \mathfrak{a}_i$. 定义 D_1, D_2 如下:

$$D_1(x_1+x_2) = Dx_1,$$

$$D_2(x_1+x_2) = Dx_2.$$

很清楚 $D_i \in \mathrm{Der}\mathfrak{a}_i$ 且 $D = D_1 + D_2$.

从上面讨论得到 (2.3.4). (2.3.3) 立即由 (2.3.4) 推出.

(3) 如果 $\mathfrak{g}$ 是完备的, 则 $C(\mathfrak{g})=0$ 且 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. 因而从结论 (1) 得 $C(\mathfrak{a}_i)=0$, $(i=1,2)$. 又结论 (2) 推出

$$\mathrm{ad}\mathfrak{a}_1 \oplus \mathrm{ad}\mathfrak{a}_2 = \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2.$$

所以 $\mathfrak{a}_i$ $(i=1,2)$ 都是完备的.

现在假设 $\mathfrak{a}_i$ $(i=1,2)$ 是完备的. 从结论 (1) 我们有

$$C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{a}_1) \oplus C(\mathfrak{a}_2) = 0.$$

再将结论 2) 用于 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}\mathfrak{g} &= \mathrm{Der}\mathfrak{a}_1 \oplus \mathrm{Der}\mathfrak{a}_2 \\ &= \mathrm{ad}\mathfrak{a}_1 \oplus \mathrm{ad}\mathfrak{a}_2 \\ &= \mathrm{ad}\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

所以 $\mathfrak{g}$ 是完备的. □

定义 1 如果完备李代数 $\mathfrak{g}$ 的任何非平凡理想都不是完备的, 则称 $\mathfrak{g}$ 是 **单完备李代数**.

显然, 特征零域上的单李代数与 2 维非交换李代数均为单完备李代数.

定理 2 (1) 任何完备李代数能分解为理想的直和, 其中每个理想均是单完备李代数.

(2) 一个完备李代数是单完备的当且仅当它是不可分解的.

证 从引理 1 与定理 2.2 立即可得本定理. □

引理 3 设李代数 $\mathfrak{g}$ 有分解 (2.3.1), $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 且 $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}_1$. 则

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus (\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}), \tag{2.3.6}$$

而且 $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$ 当且仅当 $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_2) \lhd \mathfrak{a}_2$.

证 此引理的证明很容易, 略去. □

定义 2 如果李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同态 φ 满足

$$\varphi \cdot \mathrm{ad}x = \mathrm{ad}x \cdot \varphi,\ \forall x \in \mathfrak{g}, \tag{2.3.7}$$

则称 φ 为 $\mathfrak{g}$ **的** $\mathfrak{g}$**- 自同态**.

例 设李代数 $\mathfrak{g}$ 有分解 (2.3.1). 又对此分解, $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{a}_1$ 的投影为 π. 则 π 是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态.

事实上, 对任何 $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_i, y_i \in \mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2)$, 我们有

$$\pi \cdot \mathrm{ad}x(y) = [x_1, y_1] = \mathrm{ad}x \cdot \pi(y).$$ □

引理 4 设 φ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态. 则存在 $k \in \mathbf{N}$ 使得

(1) $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解:

$$\mathfrak{g} = \ker \varphi^k \oplus \mathrm{Im}\varphi^k, \tag{2.3.8}$$

(2) 进而，若 $\mathfrak{g}$ 是不可分解的，则有

$$\varphi^k = 0 \text{ 或 } \varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}. \tag{2.3.9}$$

证 (1) 记 φ 的极小多项式为 $f(\lambda) = \lambda^k g(\lambda)$, 这里 λ 与 $g(\lambda)$ 互素. 于是存在多项式 $u(\lambda), v(\lambda)$ 使得

$$u(\lambda)g(\lambda) + v(\lambda)\lambda^k = 1.$$

因此

$$y = u(\varphi)g(\varphi)y + v(\varphi)\varphi^k y, \forall\, y \in \mathfrak{g}.$$

而且

$$u(\varphi)g(\varphi)y \in \ker \varphi^k,\ v(\varphi)\varphi^k y \in \mathrm{Im}\varphi^k.$$

这样我们得到

$$\mathfrak{g} = \ker \varphi^k + \mathrm{Im}\varphi^k.$$

如果 $y \in \ker \varphi^k \cap \mathrm{Im}\varphi^k$, 则有 $y_0 \in \mathfrak{g}$ 使得

$$\varphi^k y = 0,\ y = \varphi^k y_0.$$

所以

$$y = u(\varphi)g(\varphi)\varphi^k y_0 + v(\varphi)\varphi^k y = u(\varphi)f(\varphi)y_0 = 0.$$

因此

$$\mathfrak{g} = \ker\varphi^k \dot{+} \mathrm{Im}\varphi^k.$$

从 φ 是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态，知 φ^k 也是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态. 由此可知 $\ker \varphi^k$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 现证 $\mathrm{Im}\varphi^k \triangleleft \mathfrak{g}$. 设 $y \in \mathrm{Im}\varphi^k$, 则有 $y_0 \in \mathfrak{g}$ 使 $y = \varphi^k y_0$. 于是对任何 $x \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$[x, y] = [x, \varphi^k y_0] = \varphi^k([x, y_0]) \in \mathrm{Im}\varphi^k.$$

至此，我们完成了 (1) 的证明.

(2) 如果 $\mathfrak{g}$ 是不可分解的, 则从 1) 知 $\ker\varphi^k = \mathfrak{g}$ 或 $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathfrak{g}$. 前者意味着 $\varphi^k = 0$, 后者意味着 $\varphi^k \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 所以 $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. □

引理 5 设 $\mathfrak{g}$ 是不可分解李代数. 又 φ_1, φ_2 $\cdots$, φ_n 与 $\sum\limits_{i=1}^{j} \varphi_i$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$- 自同态，且

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \mathrm{id}. \tag{2.3.10}$$

则有 i 使得 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.

证 我们对 n 用归纳法来证明此引理. $n = 1$ 时，是显然的.

$n = 2$ 时, 因 $\varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{id}$, 故 $\varphi_1(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_1$, 于是 $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$. 现在假设 $\varphi_1, \varphi_2 \notin \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 由于 $\mathfrak{g}$ 不可分解及引理 4, 我们有 k_i $(i = 1, 2)$ 使得 $\varphi_i^{k_i} = 0$. 取 $k > k_1 + k_2$, 则

$$\mathrm{id} = (\varphi_1 + \varphi_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \varphi_1^{k-j} \varphi_2^j = 0.$$

此矛盾推出 $\varphi_1 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 或 $\varphi_2 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.

对于 $n > 2$, 令 $\psi = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi_i$. 故 ψ, φ_n 均是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态，且 $\psi + \varphi_n = \mathrm{id}$. 因而，由对 $n = 2$ 的讨论得 $\varphi_n \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 或 $\psi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 在第一种情形，引理自然成立. 故假设 $\psi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 很清楚 ψ^{-1}, $\varphi_1\psi^{-1}$, $\cdots$, $\varphi_{n-1}\psi^{-1}$ 也都是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态，且 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i\psi^{-1} = \mathrm{id}$. 由归纳假设，有 i 使得 $\varphi_i\psi^{-1} \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 因此 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. □

定理 6 设 $\mathfrak{g}$ 是一个中心平凡的李代数. 又设 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m \tag{2.3.11}$$

与

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_n, \tag{2.3.12}$$

其中 $\mathfrak{h}_1, \cdots, \mathfrak{h}_m$ 和 $\mathfrak{k}_1, \cdots, \mathfrak{k}_n$ 都是不可分解的. 则

$$m = n. \tag{2.3.13}$$

并且, 如必要经重新排列后有

$$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{k}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3.14}$$

证 对 n 用归纳法证明本定理. $n = 1$ 时, 即 $\mathfrak{g}$ 不可分解. 所以 $m = n = 1$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{g}$.

现设 $n > 1$, 自然也有 $m > 1$. 对于分解 (2.3.11), 将 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}_1$ 上的投影记为 π, 再将 $\mathfrak{h}_1$ 到 $\mathfrak{g}$ 内的嵌入记为 σ, 又记对分解 (2.3.12), $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{k}_i$ 上的投影为 ρ_i, $\mathfrak{k}_i$ 到 $\mathfrak{g}$ 内的嵌入为 τ_i. 则 π, $\rho_1, \cdots, \rho_n$, 及 $\sum\limits_{i=1}^{j} \rho_i$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 自同态, 且

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}.$$

设

$$\pi_i^* = \pi\tau_i = \pi|_{\mathfrak{k}_i},$$

$$\rho_i^* = \rho_i\sigma = \rho_i|_{\mathfrak{h}_1}.$$

对任何 $i = 1, 2, \cdots, n$. 则 $\pi_i^*\rho_i^*$ 是 $\mathfrak{h}_1$ 的 $\mathfrak{h}_1$ 自同态. 定义如下

$$\left[\sum_{i=1}^{j} \tau_i\rho_i\right](x) = \sum_{i=1}^{j} \tau_i\rho_i(x), \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}$$

的映射 $\sum\limits_{i=1}^{j} \tau_i\rho_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathfrak{g}$ 自同态. 因而

$$\pi\left[\sum_{i=1}^{j} \tau_i\rho_i\right]\sigma = \sum_{i=1}^{j} \pi_i^*\rho_i^* = \sum_{i=1}^{j} \pi_i^* \cdot \rho_i|_{\mathfrak{h}_1}$$

是 $\mathfrak{h}_1$ 的 $\mathfrak{h}_1$ 自同态. 对每个 $h \in \mathfrak{h}_1$, 我们有

$$h = \pi(h) = \pi\left[\sum_{i=1}^{n} \rho_i(h)\right] = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^* \rho_i^*(h),$$

即有

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^* \rho_i^* = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}_1}.$$

因此由引理 5, 存在指数 i 使得 $\pi_i^* \rho_i^* \in \mathrm{Aut}\mathfrak{h}_1$. 如若需要经 $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{k}_n$ 的排列, 我们可认为 $i = 1$, $\pi_1^* \rho_1^* \in \mathrm{Aut}\mathfrak{h}_1$. 这就推出 ρ_1^* 是一一映射. 设 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_n$. 则 $C(\mathfrak{h}) = C(\mathfrak{k}) = 0$ 且 $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$, $\mathfrak{k} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_1)$, $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$, $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}_1$ 以及 $\mathfrak{k} = \ker \rho_1$. 因此

$$0 = \ker \rho_1^* = \mathfrak{h}_1 \cap \ker \rho_1 = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{k}.$$

所以 $\mathfrak{h}_1 \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}_1$. 由引理 3, 我们有

$$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{h}).$$

但 $\mathfrak{k}_1$ 是不可分解的, 故 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{h}_1$. 于是 $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$. 由归纳假设便得到定理. □

定理 7 设 $\mathfrak{g}$ 是一个完备李代数. 则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m, \tag{2.3.15}$$

这里每个 $\mathfrak{g}_i$ 是单完备李代数并为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 又这种分解除这些理想的次序外是唯一的.

证 从定理 2.2 知若完备李代数 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 又 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的理想, 则 $\mathfrak{k}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由此知定理的第一部分成立. 定理的第二部分则可由定理 6 得到. □

推论 8 特征零域上任何半单李代数能分解为单理想的直和, 而且除和中各项次序外, 这种分解是唯一的.

证 因为特征零域上半单 (相应, 单) 李代数是完备 (相应, 单完备) 李代数. □

这个推论是特征零域上半单李代数理论中熟知的, 但也是最重要的结果之一. 通常的证明要用到这类李代数的 Killing 型非退化这一事实. 这里的证明却完全不用 Killing 型. 由于特征 $p(>0)$ 域上半单李代数的 Killing 型可能是退化的, 也可能不是完备李代数, 因而上述结论不再成立. 但是, 应用定理 6, 我们可以断言:

推论 9 任何半单李代数能分解为不可分解的半单理想的直和, 而且除和中各项次序外, 这种分解是唯一的.

§2.4 完备李代数的根基

本节假定 $\mathfrak{g}$ 是特征零的代数闭域上的有限维完备李代数. 于是 $\mathfrak{g}$ 有 Levi 分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}, \tag{2.4.1}$$

其中, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数, 根基. 又设 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想, 即 $\mathfrak{g}$ 的 nil 根基. 于是 $\mathfrak{g}$ 的幂零根基 (nilpotent radical) 为

$$\mathfrak{n}_0 \subseteq \mathfrak{n}. \tag{2.4.2}$$

定义 1 $\mathfrak{g}$ 的包含 $\mathfrak{s}$ 的极小理想 $\mathfrak{l}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Levi 理想**.

定理 1 (参看 [40]) 设 $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 理想. 则存在 $k \in \mathbf{N}$ 使得 $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}^{(k+1)}$, 且

(1) $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{(k)}$, (2.4.3)

(2) $\mathfrak{l} = \mathfrak{s} + [\mathfrak{n}_0, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{n}_0, [\mathfrak{n}_0, \mathfrak{s}]] + \cdots$, (2.4.4)

(3) $\mathfrak{l} = \sum\limits_{\theta \in \mathfrak{A}} \theta(\mathfrak{s})$. (2.4.5)

证 (1) 由 (2.4.1) 知 $\mathfrak{s} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 因此, $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}$, 故

$$\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}.$$

另一方面，从 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{l}$ 得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{r}$，所以有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}] = [\mathfrak{l} + \mathfrak{r}, \ \mathfrak{l} + \mathfrak{r}] \\
&\subseteq [\mathfrak{l}, \ \mathfrak{l}] + [\mathfrak{l}, \ \mathfrak{r}] + [\mathfrak{r}, \ \mathfrak{r}] \\
&\subseteq \mathfrak{l} + \mathfrak{r}^{(2)}, \\
\mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \ \mathfrak{g}^{(1)}] \\
&\subseteq [\mathfrak{l} + \mathfrak{r}^{(1)}, \ \mathfrak{l} + \mathfrak{r}^{(1)}] \\
&\subseteq \mathfrak{l} + \mathfrak{r}^{(2)}, \\
&\cdots \\
\mathfrak{g}^{(i)} &\subseteq \mathfrak{l} + \mathfrak{r}^{(i)}.
\end{aligned}$$

因为 $\mathfrak{r}$ 是可解的，所以存在 k 使得 $i > k$ 时，$\mathfrak{r}^{(i)} = 0$. 由此有

$$\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}^{(i)} \subseteq \mathfrak{l}, \ i > k.$$

因此 (1) 成立.

(2) 以 $\mathfrak{l}_1$ 表示 (2.4.4) 的右式. 由 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{l} \lhd \mathfrak{g}$，知

$$\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathfrak{l}.$$

另一方面，显然 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{l}_1$，若能证明 $\mathfrak{l}_1 \lhd \mathfrak{g}$ 则由 $\mathfrak{l}$ 的定义知

$$\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}_1.$$

因此 (2.4.4) 成立. 现证 $\mathfrak{l}_1 \lhd \mathfrak{g}$.

因为 $\mathfrak{s}$ 是半单的，所以 $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \ \mathfrak{s}]$. 于是

$$[\mathfrak{s}, \ \mathfrak{r}] = [\mathfrak{r}, \ [\mathfrak{s}, \ \mathfrak{s}]] = [[\mathfrak{r}, \ \mathfrak{s}], \ \mathfrak{s}].$$

但是

$$[\mathfrak{r}, \ \mathfrak{s}] \subseteq [\mathfrak{g}, \ \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{n}_0,$$

所以

$$[\mathfrak{r}, \ \mathfrak{s}] \subseteq [\mathfrak{n}_0, \ \mathfrak{s}].$$

从这些事实，我们知道

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g},\ \mathfrak{s}] &= [\mathfrak{r},\ \mathfrak{s}] + [\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s} + [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}] \\ &\subseteq \mathfrak{l}_1, [\mathfrak{g},\ [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}]] \subseteq [\mathfrak{r},\ [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}]] + [\mathfrak{s},\ [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}] + [[\mathfrak{r}, \mathfrak{n}_0],\ \mathfrak{s}] + [\mathfrak{n}_0,\ [\mathfrak{s},\ \mathfrak{r}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}] + [\mathfrak{n}_0,\ [\mathfrak{n}_0, \mathfrak{s}]] \\ &\subseteq \mathfrak{l}_1.\end{aligned}$$

于是由归纳法容易证明 $\mathfrak{l}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，所以 (2) 成立.

(3) 现设 $\mathfrak{s}_1$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数. 于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{r}.$$

因而从 (1) 我们有

$$\mathfrak{s}_1 \subseteq \mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{l}.$$

因此，由 (1.1.2) 推出

$$\mathfrak{s}_1 \subseteq \sum_{\theta \in \mathfrak{A}} \theta(\mathfrak{s}) \subseteq \mathfrak{l}.$$

另一方面，$\forall x \in \mathfrak{s}$, $z \in \mathfrak{n}_0$, 有

$$\exp t\ \mathrm{ad} z(x) \in \sum_{\theta \in \mathfrak{A}} \theta(\mathfrak{s}),$$

即

$$x + t[z,\ x] + \frac{t^2}{2!}[z,\ [z,\ x]] + \cdots \in \sum_{\theta \in \mathfrak{A}} \theta(\mathfrak{s}).$$

因为 t 是任意的， $\mathrm{ad} z$ 是幂零的，因此有

$$[z,\ x] \in \sum_{\theta \in \mathfrak{A}} \theta(\mathfrak{s}).$$

因而

$$\left[\mathfrak{n}_0,\ \sum_{\theta\in\mathfrak{A}}\theta(\mathfrak{s})\right]\subseteq\sum_{\theta\in\mathfrak{A}}\theta(\mathfrak{s}),$$

故

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}&=\mathfrak{s}+[\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}]+[\mathfrak{n}_0,\ [\mathfrak{n}_0,\ \mathfrak{s}]]+\cdots\\&\subseteq\sum_{\theta\in\mathfrak{A}}\theta(\mathfrak{s}).\end{aligned}$$

所以 (3) 成立. □

注 从结论 2), 若将 $\mathfrak{g}$ 看作一个 $\mathfrak{n}_0$ 模, 则 $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{s}$ 生成的子 $\mathfrak{n}_0$ 模.

因为 $[\mathfrak{s},\ \mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{r}$, 所以 $\mathfrak{r}$ 可看作一个 $\mathfrak{s}$ 模. $\mathfrak{s}$ 是半单的事实可推出 $\mathfrak{r}$ 能分解为不可约子模的直和. 设 $\mathfrak{r}_0$ 是所有 1 维子模 (它们都是平凡子模) 的和, $\mathfrak{r}_n$ 是非平凡子模的和. 于是有下面定理.

定理 2 假设如上, 则

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{s},\ \mathfrak{r}_0]=(0),\\&[\mathfrak{s},\ \mathfrak{r}_n]=\mathfrak{r}_n,\\&[\mathfrak{r}_0,\ \mathfrak{r}_0]\subseteq\mathfrak{r}_0,\\&[\mathfrak{r}_0,\ \mathfrak{r}_n]\subseteq\mathfrak{r}_n,\\&\mathfrak{s}+\mathfrak{r}_n\subseteq\mathfrak{l}=\mathfrak{g}^{(k)}=\mathfrak{g}^{(k+1)}=\cdots,\\&\mathfrak{r}_n\subseteq\mathfrak{n}_0.\end{aligned}$$

证 除第四个公式外, 其余各式都是明显的. 设 $\mathfrak{m}$ 是任一非平凡的不可约子模, 又 $x_0\in\mathfrak{r}_0$, 由于 $[x_0,\ \mathfrak{s}]=0$, 因而

$$[\mathfrak{s},[x_0,\ \mathfrak{m}]=[x_0,\ [\mathfrak{s},\ \mathfrak{m}]]=[x_0,\ \mathfrak{m}],$$

即 $[x_0,\ \mathfrak{m}]$ 也是 $\mathfrak{s}$ 模, 而且 $\mathrm{ad}x_0|_{\mathfrak{m}}$ 是从 $\mathfrak{m}$ 到 $[x_0,\ \mathfrak{m}]$ 的模同态, 因 $\mathfrak{m}$ 是不可约的, 故 $[x_0,\mathfrak{m}]\neq 0$ 时, $[x_0,\ \mathfrak{m}]$ 与 $\mathfrak{m}$ 同构, 因而 $[x_0,\ \mathfrak{m}]\subseteq\mathfrak{r}_n$. 于是定理成立. □

推论 3 $\mathfrak{r}_0$ 是一个子代数，$\mathfrak{r}_0\cap\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}_0\cap\mathfrak{n}_0$ 分别是 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_0$ 的理想，都是 $\mathfrak{n}$ 的理想.

由前面定理，容易得此推论. □

推论 4 $\mathfrak{r}_n$ 生成的子代数 $\mathfrak{n}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想，且

$$\mathfrak{n}_1\subseteq\mathfrak{l}\cap\mathfrak{n}_0.$$

证 我们只要注意到

$$\mathfrak{n}_1=\mathfrak{r}_n+[\mathfrak{r}_n,\ \mathfrak{r}_n]+\cdots\subseteq\mathfrak{l}\cap\mathfrak{n}_0,$$

以及 $[\mathfrak{s},\ \mathfrak{r}_n]=\mathfrak{r}_n$, $[\mathfrak{r}_0,\ \mathfrak{r}_n]\subseteq\mathfrak{r}_n$. □

现设 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数，于是 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}=\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 同构. 因此由§1.2 知，$\mathfrak{g}$ 有分解:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n},\tag{2.4.6}$$

其中，$\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数，根基，极大幂零理想. 这里，$\mathfrak{m}=\mathfrak{s}+\mathfrak{a}$ 是约化李代数，$\mathfrak{n}$ 是完全可约 $\mathfrak{m}$ 模. 以 $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{u}_0$ 记 $\mathfrak{m}$ 模 $\mathfrak{n}$ 的非平凡，平凡子模的和. 显然

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{m},\ \mathfrak{u}_0]=0,\\&[\mathfrak{m},\ \mathfrak{u}_n]=\mathfrak{u}_n,\\&[\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{u}_0]\subseteq\mathfrak{u}_0,\\&[\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{u}_n]\subseteq\mathfrak{u}_n,\\&\mathfrak{u}_n\subseteq\mathfrak{n}_0.\end{aligned}$$

而且还有

$$\begin{aligned}&\mathfrak{n}=\mathfrak{u}_n+\mathfrak{u}_0,\\&\mathfrak{u}_n=\mathfrak{r}_n+\mathfrak{u}_n\cap\mathfrak{r}_0,\\&\mathfrak{r}_0=\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{u}_n\cap\mathfrak{r}_0,\\&C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})=\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0.\end{aligned}$$

很明显，$\mathfrak{u}_0$ 是一个子代数，$\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{n}_0$ 分别是 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_0$ 的理想，都是 $\mathfrak{n}$ 的理想.

引理 5 设李代数 $\mathfrak{g}$ 中心为零，且有分解 (2.4.6)，则下面结果成立.

(1) $\mathfrak{u}_n$ 生成的子代数 $\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想.

(2) $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}_1$ 同构于 $\mathfrak{s}$ 与一个幂零李代数的直和.

(3) $\mathfrak{u}_1 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{ad}\mathfrak{g}^k(\mathfrak{r})$.

(4) 如果 $x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{u}_0$, $[x,\ \mathfrak{u}_1] = 0$, 则 $x = 0$.

证 (1) 我们只要注意到

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_n + [\mathfrak{u}_n,\ \mathfrak{u}_n] + [\mathfrak{u}_n,\ [\mathfrak{u}_n,\ \mathfrak{u}_n]] + \cdots,$$

以及 $[\mathfrak{m},\ \mathfrak{u}_n] = \mathfrak{u}_n$, $[\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{u}_n] \subseteq \mathfrak{u}_n$, 知 (1) 成立.

(2) 设 π 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}_1$ 的自然同态. 因为

$$\mathfrak{u}_n = [\mathfrak{m},\ \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{u}_1 \subseteq \mathfrak{n},$$

所以

$$[\pi(\mathfrak{m}),\ \pi(\mathfrak{n})] = 0,$$

而且

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{u}_1 \cong \mathfrak{s} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}/\mathfrak{u}_1.$$

注意到

$$[\mathfrak{s},\ \mathfrak{r}] = \mathfrak{r}_n \subseteq \mathfrak{u}_n \subseteq \mathfrak{u}_1,$$

故有

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{u}_1 \cong \mathfrak{s} \oplus (\mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}/\mathfrak{u}_1).$$

再由于

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} + \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a},\ \mathfrak{n}] \subseteq [\mathfrak{m},\ \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{u}_n \subseteq \mathfrak{u}_1,$$

于是

$$[\pi(\mathfrak{s}),\ \pi(\mathfrak{a})] = [\pi(\mathfrak{a}),\ \pi(\mathfrak{n})] = 0,$$

且 $\pi(\mathfrak{r})$ 是幂零理想. 故 (2) 成立.

(3) 注意到 $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_0$, 所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}\mathfrak{g}(\mathfrak{r}) &= [\mathfrak{g},\ \mathfrak{a} + \mathfrak{n}] = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{n}] + [\mathfrak{m} + \mathfrak{n},\ \mathfrak{a}] \\
&= [\mathfrak{g},\ \mathfrak{n}] + [\mathfrak{n},\ \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \\
&= [\mathfrak{g},\ \mathfrak{u}_n] + [\mathfrak{m} + \mathfrak{n},\ \mathfrak{u}_0] \\
&\subseteq \mathfrak{u}_1 + [\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{u}_0], \\
\mathrm{ad}\mathfrak{g}^2(\mathfrak{r}) &\subseteq \mathfrak{u}_1 + [\mathfrak{m} + \mathfrak{n},\ [\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{u}_0]] \\
&\subseteq \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_0^{(2)}, \\
&\cdots \\
\mathrm{ad}\mathfrak{g}^k(\mathfrak{r}) &\subseteq \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_0^{(k)}.
\end{aligned}
$$

再由 $\mathfrak{u}_0$ 的幂零性, 知 (3) 成立.

(4) 显然, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}_0) + \mathfrak{u}_1$. 令

$$\mathfrak{u}_2 = C_{\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0}(\mathfrak{u}_1) = \{x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{u}_0 | [x, \mathfrak{u}_1] = 0\}.$$

易证 $\mathfrak{u}_2$ 是 $\mathfrak{a} + \mathfrak{u}_0$ 的理想, 且

$$\mathfrak{u}_2 = (\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{a}) \oplus (\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{u}_0).$$

但是, 从

$$[\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{a},\ \mathfrak{m}] = [\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{a},\ \mathfrak{u}_0] = [\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{a},\ \mathfrak{u}_1] = (0),$$

知 $\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{a} \subseteq C(\mathfrak{g}) = 0$. 因此 $\mathfrak{u}_2 \subseteq \mathfrak{u}_0$.

如果 $\mathfrak{u}_2 \neq (0)$, 则有 $k \geq 0$, 使得

$$(\mathrm{ad}\mathfrak{u}_0)^k(\mathfrak{u}_2) \neq (0),$$

但

$$(\mathrm{ad}\mathfrak{u}_0)^{k+1}(\mathfrak{u}_2) = (0),$$

即

$$(\mathrm{ad}\mathfrak{u}_0)^k(\mathfrak{u}_2) \subseteq \mathfrak{u}_0 \cap C(\mathfrak{u}_0).$$

所以

$$\mathfrak{u}_2 \cap C(\mathfrak{u}_0) \neq (0).$$

另一方面,

$$\mathfrak{u}_2 \cap C(\mathfrak{u}_0) \subseteq C(\mathfrak{g}) = 0.$$

此矛盾推出 (4) 成立. □

下面我们假定 $U_1 = \mathrm{Der}\mathfrak{u}_1$.

定理 6 设 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数. 若 $D \in U_1$ 满足

$$D([x,\ u_1]) - [x,\ D(u_1)] = 0, \forall x \in \mathfrak{m},\ u_1 \in \mathfrak{u}_1,$$

则存在 $x_0 \in \mathfrak{u}_0$ 使得

$$D = \mathrm{ad}x_0|_{\mathfrak{u}_1}.$$

证 由引理 5 知 $\mathfrak{u}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想. 于是

$$\tau(x) = \mathrm{ad}x|_{\mathfrak{u}_1},\ x \in \mathfrak{g},$$

是 $\mathfrak{g}$ 到 U_1 的同态. 由 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$, 有

$$[\tau(\mathfrak{a}),\ C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m}))] = 0.$$

由 $[\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{m}] = 0$, 知

$$\tau(\mathfrak{u}_0) \subseteq C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m})).$$

定理的证明归结为证明

$$\tau(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) = C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m})). \tag{2.4.7}$$

由于 $\mathfrak{u}_0,\ \mathfrak{u}_1 \subseteq \mathfrak{n}$, 故 $\mathrm{ad}\tau(\mathfrak{u}_0)$ 在 $C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m}))$ 上的作用是幂零的. 且由

$$[\tau(\mathfrak{u}_0),\ \tau(\mathfrak{u}_0)] \subseteq \tau(\mathfrak{u}_0),$$

知 $\tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a})$ 是 $\mathrm{ad}\tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a})=\mathrm{ad}\tau(\mathfrak{u}_0)$ 的不变子空间. $\mathrm{ad}\tau(\mathfrak{u}_0)$ 在商空间 $C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m}))/\tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a})$ 上的诱导也是幂零作用的.

如果

$$C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m}))\neq\tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}),$$

则有 $X\in C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m}))$, $X\notin\tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a})$, 使得

$$[X,\ \tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a})]\subseteq\tau(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}).$$

由于 $\mathfrak{u}_0$ 是 $\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}$ 的极大幂零理想, 由定理 1.1.5 知

$$[X,\ \tau(\mathfrak{u}_0)]\subseteq\tau(\mathfrak{u}_0).$$

再由引理 5 知, $x,\ y\in\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}$, $\tau(x)=\tau(y)$ 当且仅当 $x=y$. 于是对 $y\in\mathfrak{u}_0$, 有唯一的 $\tilde{X}(y)\in\mathfrak{u}_0$ 使得

$$[X,\ \tau(y)]=\tau(\tilde{X}(y)).$$

又因为对 $y_1,\ y_2\in\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}$ 及 $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbf{C}$, 有

$$\begin{aligned}\tau(\tilde{X}(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2))&=[X,\ \tau(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)]\\&=\lambda_1[X,\ \tau(y_1)]+\lambda_2[X,\ \tau(y_2)]\\&=\lambda_1\tau(\tilde{X}(y_1))+\lambda_2\tau(\tilde{X}(y_2))\\&=\tau(\lambda_1\tilde{X}(y_1)+\lambda_2\tilde{X}(y_2));\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&\tau(\tilde{X}([y_1,\ y_2]))\\&=[X,\ \tau([y_1,\ y_2])\\&=[[X,\ \tau(y_1)],\ \tau(y_2)]+[\tau(y_1),\ [X,\ \tau(y_2)]]\\&=[\tau(\tilde{X}(y_1)),\ \tau(y_2)]+[\tau(y_1),\ \tau(\tilde{X}(y_2))]\\&=\tau([\tilde{X}(y_1),\ y_2]+[y_1,\ \tilde{X}(y_2)]).\end{aligned}$$

于是

$$\tilde{X}\in\mathrm{Der}(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}).$$

另一方面，对 $z \in \mathfrak{u}_1$，有

$$[X,\ \tau(z)] = [X,\ \mathrm{ad}z|_{\mathfrak{u}_1}] = \mathrm{ad}X(z)|_{\mathfrak{u}_1},$$

即

$$[X,\ \tau(z)] = \tau(X(z)),\ z \in \mathfrak{u}_1.$$

于是

$$\tau(\tilde{X}(y)) = \tau(X(y)),\ \forall y \in \mathfrak{u}_1 \cap C_{\mathfrak{u}_1}(\mathfrak{m}).$$

考虑 $\mathfrak{g}$ 的线性变换 d，使得

$$d|_{\mathfrak{m}} = 0,\ d|_{\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}} = \tilde{X},\ d|_{\mathfrak{u}_1} = X.$$

则 $d \in \mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. 因而有 $x_0 \in \mathfrak{u}_0$ 使得 $d = \mathrm{ad}x_0$，即 $\tau(x_0) = X$. 于是结论成立. □

推论 $\tau(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})$ 是 U_1 的 Cartan 子代数.

事实上，在上面定理的证明中，已经证明 $\tau(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})$ 是幂零的，而且，若 $X \in N_{U_1}(\tau(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}))$，则 $X \in \tau(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})$. 于是推论成立. □

利用代数李代数和代数群的观点，我们还可以证明下面的定理.

定理 7 设李代数 $\mathfrak{g}$ 中心为零，且有分解 (2.4.6)，又 (2.4.7) 成立，则 $\mathfrak{g}$ 为完备李代数.

证 参见 [37].

以下我们设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$$

为完备李代数. 以 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}x$ 表示 $\mathrm{ad}x$ 在 $\mathfrak{n}$ 上的限制. 又设

$$\mathfrak{r}_0 = C_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}),$$

其中 $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. 再令

$$G = \{D \in \mathrm{Der}\mathfrak{n} | [D,\ \mathrm{ad}s] = 0,\ \forall s \in \mathfrak{s}\}.$$

显然， G 是李代数.

引理 8 假定如上，则 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a})$ 是 G 的 Cartan 子代数.

证 显然，

$$C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \cap C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{u}_0$$

是幂零李代数，于是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a})$ 是 G 的幂零子代数. 设 $D \in G$ 正规化 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a})$, 即 $\forall x \in \mathfrak{a}$ 存在 $x' \in C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a})$ 使得

$$[D,\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}x] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}x',$$

而且 x' 是唯一的. 事实上，如果 $y' \in C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a})$ 也满足

$$[D,\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}x] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}y',$$

则

$$[x' - y',\ \mathfrak{s}] = [x' - y',\ \mathfrak{a}] = [x' - y',\ \mathfrak{n}] = 0.$$

故 $x' - y' \in C(\mathfrak{g}) = (0)$, $x' = y'$.

定义 $\mathfrak{g}$ 的线性变换 D' 满足

$$D'|_{\mathfrak{s}} = 0;\ D'|_{\mathfrak{n}} = D;\ D'(x) = x',\ x \in \mathfrak{a}.$$

由此定义知

$$D'(\mathfrak{a}) \subseteq C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a}).$$

由于

$$D'([x,\ z]) = [D'x,\ z] + [x,\ D'z],\ x \in \mathfrak{a},\ z \in \mathfrak{n},$$

以及

$$D'([x,\ y] = [D'x,\ y] + [x,\ D'y] = 0,\ x,\ y \in \mathfrak{a},$$

易证 $D' \in \mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. 于是有 $h \in \mathfrak{g}$ 使得 $D' = \mathrm{ad}h$. 由 D' 的定义知 $h \in \mathfrak{r}_0$, 而且

$$(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y)h = 0,\ \forall x,\ y \in \mathfrak{a}.$$

由于 $\mathrm{ad}x$. $(x \in \mathfrak{a})$ 是半单的，故

$$[h,\ x] = 0, \forall x \in \mathfrak{a}.$$

所以

$$D \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}} C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{a}). \qquad \square$$

定理 9 设完备李代数 $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, 2$ 如 (2.4.6) 的分解为

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{s}_i + \mathfrak{a}_i + \mathfrak{n}_i.$$

则 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构当且仅当 $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{n}_1$ 与 $\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{n}_2$ 同构.

证 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构，易知 $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{n}_1$ 与 $\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{n}_2$ 同构.

现设 ψ 是 $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{n}_1$ 到 $\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{n}_2$ 的同构映射. 由 Levi 子代数的共轭性，可以假定

$$\psi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2,\ \psi(\mathfrak{n}_1) = \mathfrak{n}_2.$$

对 $\mathfrak{g}_i$ 可定义 G_i 如上. 于是 $\mathrm{Der}\mathfrak{n}_1$ 到 $\mathrm{Der}\mathfrak{n}_2$ 的映射

$$\varphi(D_1) = \psi D_1 \psi^{-1},\ D_1 \in \mathrm{Der}\mathfrak{n}_1,$$

是同构映射，而且由

$$\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_1} x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2} \psi(x),\ x \in \mathfrak{s}_1,$$

知

$$\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_1}\mathfrak{s}_1 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2}\mathfrak{s}_2,\ \varphi(G_1) = G_2.$$

所以

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2} C_{\mathfrak{r}_{2\,0}}(\mathfrak{a}_2),\ \varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_1} C_{\mathfrak{r}_{1\,0}}(\mathfrak{a}_1))$$

都是 G_2 的 Cartan 子代数.

由 [10] 或 [27] 知存在 $\theta \in \mathcal{E}(G_2) \subseteq \mathrm{Int}G_2$ 使得

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2} C_{\mathfrak{r}_{2\,0}}(\mathfrak{a}_2) = \theta(\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_1} C_{\mathfrak{r}_{1\,0}}(\mathfrak{a}_1))),$$

其中

$$\theta = \exp \mathrm{ad} X_1 \exp \mathrm{ad} X_2 \cdots \exp \mathrm{ad} X_k, \tag{2.4.8}$$

X_i 为 G_2 的强 ad 幂零元.

设 X 为 G_2 的强 ad 幂零元, X_s, X_n 为 X 的半单, 幂零部分. 于是 X_s, X_n 为 X 的多项式, 且 $X_s, X_n \in \mathrm{Der}\mathfrak{n}_2$. 故 X_s, $X_n \in G_2$. $\mathrm{ad}X_s, \mathrm{ad}X_n$ 为 $\mathrm{ad}X$ 的半单, 幂零部分, 又 $\mathrm{ad}X$ 是幂零的, 故 $\mathrm{ad}X = \mathrm{ad}X_n$, 且

$$\exp \mathrm{ad} X_n(Y) = (\exp X_n) Y (\exp -X_n),\ Y \in G_2.$$

显然, $\exp X_n \in \mathrm{Aut}\mathfrak{n}_2$. 因此, 可以假定 (2.4.8) 中的 X_i 都是 $\mathfrak{n}_2$ 的幂零导子, 且

$$\sigma = \exp X_1 \exp X_2 \cdots \exp X_k \in \mathrm{Aut}\mathfrak{n}_2.$$

而

$$\theta(Y) = \sigma Y \sigma^{-1},\ Y \in G_2.$$

$$\sigma \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2} s_2 \sigma^{-1} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2} s_2,\ \forall s_2 \in \mathfrak{s}_2.$$

特别, 对于 $x \in C_{\mathfrak{r}_{1\,0}}(\mathfrak{a}_1)$, 有唯一的 $y \in C_{\mathfrak{r}_{2\,0}}(\mathfrak{a}_2)$, 使得

$$\theta\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_1} x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_2} y,$$

而且 $x \in \mathfrak{a}_1$ 当且仅当 $y \in \mathfrak{a}_2$. 于是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的映射 ρ:

$$\rho|_{\mathfrak{s}_1} = \psi;\ \rho(x) = y,\ x \in \mathfrak{a}_1;\ \rho|_{\mathfrak{n}_1} = \sigma\psi$$

是李代数的同构映射. □

从这个定理, 我们可以看出, 完备李代数都可以看成幂零李代数的全形的子代数. 如果 $\mathfrak{n}$ 是一个幂零李代数, 半单李代数 $\mathfrak{s}$ 如导子作用于 $\mathfrak{n}$ 上. 如何配上 $\mathfrak{a}$ 使 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ 为完备李代数? [37] 中用代数群与代数李代数的观点进行了讨论, 并得到了有趣的结果. 需要指出的是存在幂零李代数 (例如特征幂零李代数) 其全形的任何子代数都不是完备李代数.

第三章　某些特殊完备李代数

在相当长的一个时期，人们所知道的完备李代数，除特征零域上的半单李代数 (确切地说，Killing 型非退化的半单李代数) 外，是非常少的．这不仅影响对这类李代数的重要性的判断，也影响对这类李代数的性质的了解．这是完备李代数理论不能发展的重要原因．但从 80 年代以来，发现了许多重要的李代数或者其本身是完备李代数，或者与完备李代数有密切关系．这样完备李代数的重要性及其性质都逐渐显现出来，因而这一理论得以发展起来．本章将介绍一些完备李代数，这是已经发现的一部分．但更多的仍有待去发掘．

§3.1　某些导子代数及全形的完备性

定理 1　设 $\mathfrak{g}$ 是中心平凡的有限维李代数，$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}^\omega)$ 是 $\mathfrak{g}^\omega$ 的全形，$\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g}^\omega)$ 的理想并使 $\mathfrak{k} \supseteq \mathfrak{g}^\omega$ 及 $\mathfrak{k}$ 同构于 $\mathfrak{g}$. 则

$$\dim \mathrm{Der}\mathfrak{g} = \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega + \dim C(\mathfrak{g}^\omega). \tag{3.1.1}$$

进而 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是完备李代数.

证　从定理 2.1.5 知

$$\dim \mathrm{Der}\mathfrak{g} \le \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega + \dim C(\mathfrak{g}^\omega). \tag{3.1.2}$$

另一方面，由全形的定义，我们有

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g}^\omega) = \mathfrak{g}^\omega + \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega.$$

因为 $\mathfrak{k} \lhd \mathfrak{h}(\mathfrak{g}^\omega)$，所以，对于 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega$，$\mathrm{ad}D$ 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制 $\mathrm{ad}D|_\mathfrak{k}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{k}$ 的元素；对于 $a \in \mathfrak{g}^\omega$，$\mathrm{ad}a$ 在 $\mathfrak{k}$ 上的限制 $\mathrm{ad}a|_\mathfrak{k}$

也是 $\mathrm{Der}\mathfrak{k}$ 的元素. 现设 D_1, $\cdots$, D_n 为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega$ 的基; $a_1, \cdots,$ a_m 是 $C(\mathfrak{g}^\omega)$ 的基. 如果我们能够证明

$$\{\mathrm{ad}D_i|_{\mathfrak{k}},\ \mathrm{ad}a_j|_{\mathfrak{k}}\,|\,1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$$

在 $\mathrm{Der}\mathfrak{k}$ 中是线性无关的, 则从 $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}$ 可得

$$\dim \mathrm{Der}\mathfrak{g} = \dim \mathrm{Der}\mathfrak{k} \ge m + n.$$

因此 (3.1.1) 成立.

现设 x_1, $\cdots$, x_n, y_1, $\cdots$, y_m 是 $\mathfrak{g}$ 的基域 $\mathbf{F}$ 中的元素, 并使

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{ad}D_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathrm{ad}a_j\right)\mathfrak{k} = 0.$$

因为 $\mathfrak{g}^\omega \subseteq \mathfrak{k}$ 及 $a_j \in C(\mathfrak{g}^\omega)$, 故

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{ad}D_i(\mathfrak{g}^\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i D_i(\mathfrak{g}^\omega) = 0.$$

这样

$$\sum_{i=1}^{n} x_i D_i = 0.$$

但是 D_1, $\cdots$, D_n 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega$ 的基, 故

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

且

$$\left[\sum_{j=1}^{m} y_j a_j,\ \mathfrak{k}\right] = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathrm{ad}a_j(\mathfrak{k}) = 0.$$

由此事实及 $C(\mathfrak{g}^\omega) \subset \mathfrak{g}^\omega \subset \mathfrak{k}$, 我们有 $\sum_{j=1}^{m} y_j a_j \in C(\mathfrak{k})$. 但从 $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}$ 知 $C(\mathfrak{k}) = 0$. 所以 $\sum_{j=1}^{m} y_j a_j = 0$, 故 $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$. 至此我们完成了 (3.1.1) 的证明.

用 (3.1.1) 及定理 2.1.5, 可得

$$\dim \mathrm{Der}^2\mathfrak{g} = \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}.$$

这意味着

$$\mathrm{Der}(\mathrm{Der}\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathrm{Der}\mathfrak{g}).$$

又由 $C(\mathfrak{g}) = (0)$ 得 $C(\mathrm{Der}\mathfrak{g}) = (0)$. 故 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是完备的. □

定理 2 设 $\mathfrak{a}$ 是 n 维交换李代数. 则其全形 $\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ 是单完备李代数.

证 很清楚

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \dot{+} \mathrm{Der}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \dot{+} gl(\mathfrak{a}).$$

设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathbf{F}\, \mathrm{id}_{\mathfrak{a}},$$

这里 $\mathbf{F}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的基域. 则

$$C(\mathfrak{g}) = (0).$$

由

$$[gl(\mathfrak{a}),\ \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}] = (0),$$

推出

$$\mathfrak{g} \lhd \mathfrak{h}(\mathfrak{a}) \quad 及 \quad \mathfrak{g}^\omega = \mathfrak{a}.$$

因而由定理 1 我们得到

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Der}\mathfrak{g} &= \dim C(\mathfrak{g}^\omega) + \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega \\ &= n + n^2 \\ &= \dim \mathfrak{h}(\mathfrak{a}).\end{aligned}$$

然而,

$$C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{a})}(\mathfrak{g}) = (0).$$

故 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}(\mathfrak{a})$, 从而 $\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ 是完备的.

设 $\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ 有理想直和分解:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2.$$

以 π 表示 $\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ 到 $gl(\mathfrak{a}) = \mathfrak{h}(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ 上的自然同态. 所以

$$\pi(\mathfrak{h}(\mathfrak{a})) = gl(\mathfrak{a})$$

导出的 $\pi(\mathfrak{a}_1)$, $\pi(\mathfrak{a}_2)$ 都是 $gl(\mathfrak{a})$ 的理想. 但是 $\mathbf{F}\,\mathrm{id}$ 与 $sl(\mathfrak{a})$ 是 $gl(\mathfrak{a})$ 仅有的两个非平凡理想. 故可设 $\mathbf{F}\,\mathrm{id} \subseteq \pi(\mathfrak{a}_1)$. 也就是说 $\mathrm{id} + v \in \mathfrak{a}_1$ 对某个 $v \in \mathfrak{a}$. 于是

$$\mathfrak{a} = [\mathrm{id} + v,\ \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}_1,$$

所以

$$\mathfrak{g} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{id} \dot{+} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_1.$$

如此, 得 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_2 = (0)$. 若 $\mathfrak{a}_2 \neq (0)$, 则有 $A \in gl(\mathfrak{a})$, $A \neq 0$ 与 $v \in \mathfrak{a}$ 使得 $A + v \in \mathfrak{a}_2$. 因 $A \neq 0$, 故有某个 $v_0 \in \mathfrak{a}$ 使得 $A + v_0 \neq 0$. 然而,

$$Av_0 = [A + v,\ v_0] \in \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a} = 0.$$

这样与 $\mathfrak{a}_2 \neq (0)$ 矛盾, 因此 $\mathfrak{a}_2 = (0)$. 于是 $\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ 是单完备李代数. □

为讨论另一类单完备李代数, 先给出下面的定义.

定义 1 李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **特征理想**, 如果它满足下面条件:

$$D(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a},\ \forall D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}. \tag{3.1.3}$$

显然, 特征理想是理想.

引理 3 若 $\mathfrak{g}$ 是不可分解李代数，而且满足 $C(\mathfrak{g})=(0)$ 与 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. 则 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 也是不可分解的.

证 设 $\mathfrak{a}=\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 因 $C(\mathfrak{g})=0$, 故可认为 $\mathfrak{g}\lhd\mathfrak{a}$. 若 $\mathfrak{a}$ 有分解:

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_2,$$

则对 $y,\ z\in\mathfrak{g}$, 存在 $y_1,\ z_1\in\mathfrak{a}_1$; $y_2,\ z_2\in\mathfrak{a}_2$ 使得 $y=y_1+y_2$, $z=z_1+z_2$. 因此有

$$[y,z]=[y_1,z]+[y_2,z],$$

与

$$[y_1,z]\in\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{g},\quad [y_2,z]\in\mathfrak{a}_2\cap\mathfrak{g}.$$

这些导出

$$\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{g})\oplus(\mathfrak{a}_2\cap\mathfrak{g}).$$

能够假定 $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{g}=(0)$ 这是因为 $\mathfrak{g}$ 是不可分解的. 于是 $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{a}_2$. 因而 $\mathfrak{a}_1\subseteq C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})=(0)$. 这就是说 $\mathfrak{a}$ 是不可分解的. □

定理 4 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，而且其中心平凡，又 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的特征理想. 则 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是完备李代数.

进一步，又若 $\mathfrak{g}$ 是不可分解的，且 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$. 则 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是单完备李代数.

证 仍以 $\mathfrak{a}$ 表示 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 因 $C(\mathfrak{g})=0$, 故可认为 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的特征理想. 设 $\mathfrak{b}$ 是通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张，即 $\mathfrak{a}\lhd\mathfrak{b}$. 于是有 $\mathrm{ad}b\in\mathrm{Der}\mathfrak{a}$, $\forall\mathrm{b}\in\mathfrak{b}$. 由 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的特征理想，故存在元素 $a\in\mathfrak{a}$ 使得 $\mathrm{ad}a|_{\mathfrak{g}}=\mathrm{ad}b|_{\mathfrak{g}}$. 于是 $\mathrm{ad}(a-b)|_{\mathfrak{g}}=0$, 即 $a-b\in C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g})$. 这样我们得到

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}+C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g}).$$

但是

$$\mathfrak{a}\cap C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g})=C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})=(0)$$

以及 $\mathfrak{a}\lhd\mathfrak{b}$, $C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g})\lhd\mathfrak{b}$. 因此

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\oplus C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g}).$$

从此立刻可得

$$C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g}) \subseteq C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}).$$

另一方面，从 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$ 推出

$$C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{g}) \supseteq C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}).$$

因此我们得到

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}).$$

由定理 2.2.2 知 $\mathfrak{a} = \mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是完备李代数.

又若 $\mathfrak{g}$ 是不可分解的，且 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. 则由引理 3 知 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是不可分解的. 再由定理 2.3.2 知 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是单完备的. □

§3.2 模单完备李代数

特征 $p(>0)$ 的域上的李代数简称为 **模李代数**. 半单模李代数与特征为零的域上的半单李代数 (简称为 **常半单李代数**) 有很大的差别. 重要差别之一是半单模李代数的 Killing 型可能是退化的. Killing 型的非退化性导出了常半单李代数的分解及其唯一性；也导出了常半单李代数的完备性. 的确，存在 Killing 退化的单模李代数与非完备的单模李代数. 在群论中，有限单群的自同构群是完备群，这一结果为人们所熟知. (其实，此类群还是不可分解的，或任何非平凡的正规子群都不是完备群.) 本节将证明在李代数理论中也有相应的结果.

定理 1 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维单李代数，则 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是单完备李代数.

证 由于 $C(\mathfrak{g}) = 0$, 从定理 2.1.5 知

$$\dim \mathrm{Der}^n\mathfrak{g} \leq \dim C(\mathfrak{g}^\omega) + \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}^\omega.$$

又由 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，故

$$\mathfrak{g}^\omega = \mathfrak{g}, C(\mathfrak{g}^\omega) = C(\mathfrak{g}) = (0).$$

于是

$$\dim \mathrm{Der}\mathfrak{g} \leq \dim \mathrm{Der}^2\mathfrak{g} \leq \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}.$$

因此, $\dim \mathrm{Der}^2\mathfrak{g} = \dim \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 所以 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是完备的.

再由引理 1.3 知 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是不可分解的. 最后由定理 2.3.2 可得 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是单完备李代数. □

定理 2 有限维单李代数 $\mathfrak{g}$ 的导子代数 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是半单李代数

证 如我们所指出, 可将 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 等同, 故可视 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. 现设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的一个交换理想. 由 $\mathfrak{g}$ 是单的, 有

$$[\mathfrak{a},\ \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} = (0).$$

这意味着 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是半单李代数. □

从这个定理立即得到下面有趣的结果.

推论 3 存在不可分解的半单李代数, 但它不是单李代数.

证 我们知道有模单李代数 $\mathfrak{g}$, 它有外导子 (见 [47]). 也就是说, 它不是完备李代数. 于是从定理 1 与定理 2 知 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 既是单完备李代数, 又是半单李代数. 由于 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是单完备李代数, 故不可分解. 又因 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想, 故 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 不是单李代数. 因而推论成立. □

§3.3 完备李代数的一个判断定理

本节将证明一个判断李代数为完备李代数的定理. 很多完备李代数都可由此定理而得到证明.

设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, $\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子代数. 又 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$ 满足下列条件:

(1) $\mathfrak{h}$ 是交换的;

(2) $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

这里

$$\Delta \subset \mathfrak{h}^* \setminus (0),$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h,\ x] = \alpha(h)x,\ h \in \mathfrak{h}\},$$

也就是说，$\{\operatorname{ad}h \mid h \in \mathfrak{h}\}$ 能同时对角化；

(3) 在 Δ 中存在 $\mathfrak{h}^*$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ 使得

$$\dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha_j} \leq 1,$$

$$[\mathfrak{g}_{\alpha_j}, \mathfrak{g}_{-\alpha_j}] \neq 0, \text{ 若 } -\alpha_j \in \Delta;$$

(4) $\mathfrak{h}$ 与 $\{\mathfrak{g}_{\pm\alpha_j}, 1 \leq j \leq l\}$ 生成 $\mathfrak{g}$.

显然，特征为零的代数封闭域上的半单李代数满足这些条件.

引理 1 假设 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ 如上所述. 则有下列结果：

(1) 如果 $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$, 则

$$D(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}, \tag{3.3.1}$$

当且仅当对任何 $h \in \mathfrak{h}$

$$Dh = 0. \tag{3.3.2}$$

(2) 在这种情形，D 满足

$$\begin{gathered} D|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \lambda_\alpha \operatorname{id}_{\mathfrak{g}_\alpha}, \ \alpha \in \Delta, \\ \lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta, \text{ 若 } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta, \\ \lambda_{-\alpha} = -\lambda_\alpha, \text{ 若 } \alpha, -\alpha \in \Delta. \end{gathered} \tag{3.3.3}$$

(3) 此时，还有唯一的 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 使得

$$D = \operatorname{ad}h_0. \tag{3.3.4}$$

证 (1) 设 $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ 且 $Dh \in \mathfrak{h}$, $\forall\, h \in \mathfrak{h}$. 对 $\alpha \in \Delta$, $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $e_\alpha \neq 0$, 令

$$De_\alpha = h_1 + \sum_{\beta \in \Delta} x_\beta,$$

这里 $h_1 \in \mathfrak{h}$, $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, $\beta \in \Delta$. 于是从

$$D[h, e_\alpha] = [Dh, e_\alpha] + [h, De_\alpha]$$

我们得到

$$\alpha(h)(h_1 + \sum_{\beta\in\Delta} x_\beta) = \alpha(Dh)e_\alpha + \sum_{\beta\in\Delta} \beta(h)x_\beta. \qquad (3.3.5)$$

所以

$$\alpha(Dh) = 0, \ \forall\, \alpha \in \Delta.$$

因此 (3.3.1) 推出 (3.3.2). 而 (3.3.2) 导出 (3.3.1) 是明显的.

2) 由 (3.3.5), 有

$$\alpha(h)h_1 = 0,$$

$$\alpha(h)x_\beta = \beta(h)x_\beta$$

对任何 $h \in \mathfrak{h}$ 成立. 于是当 $h_1 = 0$ 且 $\beta \neq \alpha$ 时, $x_\beta = 0$, 即

$$De_\alpha = x_\alpha.$$

所以, 在 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ 时, 我们有

$$De_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha.$$

特别,

$$De_{\alpha_i} = \lambda_{\alpha_i} e_{\alpha_i},\ i = 1, \cdots, l.$$

$$De_{-\alpha_i} = \lambda_{-\alpha_i} e_{-\alpha_i}, \text{ 若 } -\alpha_i \in \Delta.$$

从条件 (3), 有

$$\lambda_{-\alpha_i} = -\lambda_{\alpha_i}, \text{ 若 } -\alpha_i \in \Delta.$$

条件 (4) 推出对于 $\alpha \in \Delta$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i, \ k_i \in \mathbb{Z},$$

同时 $\mathfrak{g}_\alpha$ 由下面形式的元素

$$[e_{\beta_1}, [\cdots, [e_{\beta_{n-1}}, e_{\beta_n}]\cdots]]$$

线性生成, 其中 $\beta_i = \pm\alpha_j$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = \alpha$. 所以 (3.3.3) 可由

$$\begin{aligned} & D([e_{\beta_1}, [\cdots, [e_{\beta_{n-1}}, e_{\beta_n}]\cdots]]) \\ = & \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\beta_i}\right) [e_{\beta_1}, [\cdots, [e_{\beta_{n-1}}, e_{\beta_n}]\cdots]] \end{aligned}$$

这一事实得到.

3) 因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 的基, 故有唯一的 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 使得

$$\alpha_j(h_0) = \lambda_{\alpha_j}, \quad j = 1, \cdots, l.$$

因而

$$D = \operatorname{ad} h_0. \qquad \square$$

引理 2 设 $\mathfrak{g}$ 仍如上述, 又 $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$. 则存在 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 使得对 $h \in \mathfrak{h}$ 有

$$Dh = h' + \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h) x_\alpha, \tag{3.3.6}$$

这里 $h' \in \mathfrak{h}$, 而 x_α 仅依赖 D, 与 h 无关.

证 设

$$Dh = h' + \sum_{\alpha\in\Delta} y_\alpha(h), \tag{3.3.7}$$

这里 $h' \in \mathfrak{h}$, $y_\alpha(h) \in \mathfrak{g}_\alpha$. 因为

$$[h,\ h_1] = 0,\quad \forall\, h_1 \in \mathfrak{h},$$

所以我们有

$$-\sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h_1) y_\alpha(h) + \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h) y_\alpha(h_1) = 0,$$

即

$$\alpha(h_1) y_\alpha(h) = \alpha(h) y_\alpha(h_1),\ \alpha \in \Delta,\ h,\ h_1 \in \mathfrak{h}. \qquad (3.3.8)$$

若 $\alpha(h) = 0$, 取 h_1 使得 $\alpha(h_1) \neq 0$. 则 (3.3.8) 推出 $y_\alpha(h) = 0$.

若 $y_\alpha(h) = 0$ 对任何 $h \in \mathfrak{h}$ 成立. 我们能取 $x_\alpha = 0$. 现设有 $h \in \mathfrak{h}$ 使得 $y_\alpha(h) \neq 0$, 故 $\alpha(h) \neq 0$. 取

$$x_\alpha = \frac{1}{\alpha(h)} y_\alpha(h).$$

于是 (3.3.8) 导出

$$\begin{aligned} y_\alpha(h_1) &= \alpha(h_1) \frac{1}{\alpha(h)} y_\alpha(h) \\ &= \alpha(h_1) x_\alpha. \end{aligned}$$

因此我们完成了引理的证明. □

定理 3 若 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数并满足条件 (1)～(4). 则 $\mathfrak{g}$ 是完备 Lie 代数.

证 设 $c \in C(\mathfrak{g})$. 于是 $c \in \mathfrak{h}$. 因而从

$$[c,\ x_\alpha] = \alpha(c) x_\alpha = 0,\ x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha \in \Delta$$

知 $c = 0$, 即 $C(\mathfrak{g}) = 0$.

现设 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 引理 2 推出

$$Dh = h' + \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(h) x_\alpha, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

因此，有

$$D + \mathrm{ad}\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\right) \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$$

与

$$\left(D + \mathrm{ad}\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\right)\right) h = h'.$$

由引理 1 得

$$h' = 0,$$

并有唯一的 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 使得

$$D + \mathrm{ad}\left(\sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha\right) = \mathrm{ad}\, h_0.$$

因而

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}.$$

所以 $\mathfrak{g}$ 是完备 Lie 代数. □

§3.4 半单李代数的抛物子代数

在本节我们假定 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数，其基域 $\mathbf{F}$ 的特征为零而且是代数封闭的. 又设 $\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子代数，Δ, Δ_+, Δ_- 和 Π 是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根系，正根系，负根系和素根系. $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的 Cartan 分解为：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{3.4.1}$$

这里

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | [h, x] = \alpha(h)x, h \in \mathfrak{h}\}.$$

我们知道 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 (x, y) 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制也是非退化的. 用此事实可将 $\mathfrak{h}$ 与其对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 等同. 所以 Δ, $\Delta_\pm$ 和 Π 均包含于 $\mathfrak{h}$ 中, 同时还有

$$[h, e_\alpha] = (\alpha, h)e_\alpha, \ h \in \mathfrak{h}, \ e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha. \tag{3.4.2}$$

$\mathfrak{g}$ 的抛物子代数在同构意义下由 Π 的子集 Π_1 唯一决定, 记为 $\mathfrak{p}_{[\Pi_1]}$ 或简记为 $\mathfrak{p}$. 因而 $\mathfrak{p}_{[\Pi_1]}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解如下.

$$\mathfrak{p}_{[\Pi_1]} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{3.4.3}$$

这里 Δ_1 满足下面条件:

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_+; \tag{3.4.4}$$

$$\Delta_1 \cap \Delta_- = \{\alpha = \sum_{\alpha_i \in \Pi} n_i \alpha_i \, | n_i = 0, \alpha_i \notin \Pi_1\}. \tag{3.4.5}$$

定理 1 特征为零的代数封闭域上半单 Lie 代数的抛物子代数及 Borel 子代数都是完备 Lie 代数.

证 设 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{[\Pi_1]}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数 (Borel 子代数作为 $\Pi_1 = \emptyset$ 时的特殊抛物子代数). 于是 $\mathfrak{p}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的分解为 (3.4.3), 其中 Δ_1 满足条件 (3.4.4) 与 (3.4.5). 从此而知, $\mathfrak{p}$ 由 $\mathfrak{h}$, e_{α_i} $(\alpha_i \in \Pi)$ 及 $e_{-\alpha_i}$ $(\alpha_i \in \Pi_1)$ 生成.

容易看出 $\mathfrak{p}$ 适合 §3.3 中条件 (1)~(4). 因而由定理 3.3 知 $\mathfrak{p}$ 是完备 Lie 代数. □

定理 2 特征为零的代数封闭域上单 Lie 代数的抛物子代数及 Borel 子代数都是单完备 Lie 代数.

证 设 $\mathfrak{g}$ 是单的, 其它符号如定理 1. 又

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$$

是 $\mathfrak{p}$ 的理想直和分解. 再设 $h,\ h' \in \mathfrak{h}$, 则有 $h_i,\ h'_i \in \mathfrak{a}_i,\ i=1,\ 2$ 使得 $h = h_1 + h_2,\ h' = h'_1 + h'_2$. 所以我们有

$$[h_1,\ h'_2] = [h_2,\ h'_1] = [h,\ h'] = 0.$$

这些推出

$$[h_1,\ h'_1] + [h_2,\ h'_2] = 0.$$

因而

$$[h_1,\ h'_1] = [h_2,\ h'_2] = 0.$$

进而

$$[h_i,\ \mathfrak{h}] = [h'_i,\ \mathfrak{h}] = (0),\ i = 1,\ 2.$$

于是 $h_i,\ h'_i \in \mathfrak{h},\ i=1,\ 2$. 我们得到

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_2,$$

这里 $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}_i\ (i=1,\ 2)$ 是 $\mathfrak{a}_i$ 的极大交换子代数. 设

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{h}_i + \sum_{\beta' \in \Delta'_i} \mathfrak{a}_{i\beta'},\ i = 1,\ 2$$

是 $\mathfrak{a}_i$ 对 $\mathfrak{h}_i$ 的根子空间分解. 现因

$$[\mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{a}_2] = [\mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{a}_1] = (0),$$

故对每个 β', 有某个 $\alpha \in \Delta_1$ 使得 $\mathfrak{a}_{i\beta'} = \mathfrak{g}_\alpha$. 因此可认为 $\Delta'_i \subseteq \Delta_1$. 这样就有

$$\Delta'_1 \cup \Delta'_2 = \Delta_1,\quad \Delta'_1 \cap \Delta'_2 = \varnothing.$$

令 $\Pi_i = \Delta'_i \cap \Pi$, 则

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2,\quad \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing,$$

及

$$[\mathfrak{g}_{\alpha_i},\ \mathfrak{g}_{\alpha_j}]=(0),\ 若\ \alpha_i\in\Pi_1,\ \alpha_j\in\Pi_2.$$

这些导出 Π_1, Π_2 之一为空集，另一为 Π. 不妨设 $\Pi_1=\Pi$, $\Pi_2=\emptyset$. 则 $(\mathfrak{h}_2,\alpha)=0$, $\forall\alpha\in\Pi$ 由 $[\mathfrak{h}_2,\mathfrak{g}_\alpha]=(0)$, $\forall\alpha\in\Pi$ 而得. 故此 $\mathfrak{h}_2=(0)$. 所以 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\subseteq\mathfrak{a}_1$. 因而

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{h}+[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_1]\subseteq\mathfrak{a}_1.$$

于是 $\mathfrak{p}$ 是单完备 Lie 代数. □

注 对 $A_l=sl(l+1,\mathbf{C})$, 有素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 和 Dynkin 图

$$\overset{\alpha_1}{\circ}\text{———}\overset{\alpha_2}{\circ}\cdots\circ\text{———}\overset{\alpha_l}{\circ}$$

A_l 对应 $\Pi_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{l-1}\}$ 的抛物子代数同构于 l 维交换 Lie 代数的全形.

§3.5 构造完备李代数

前面给出的完备李代数从原则上说是已知的一些李代数, 我们只不过是认识它们的完备性而已. 本节我们给出一种构造完备李代数的方法. 这种方法是可以进一步推广的.

定义 1 域 $\mathbf{F}$ 上的李代数 $\mathcal{H}$ 若满足

$$[\mathcal{H},\mathcal{H}]=C(\mathcal{H}),\ \dim C(\mathcal{H})=1,$$

则称为 **Heisenberg 代数**.

引理 1 设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, V^* 为其对偶空间, $\mathbf{F}c$ 是 $\mathbf{F}$ 上的 1 维线性空间. 令

$$\mathcal{H}(V)=V\dot{+}V^*\dot{+}\mathbf{F}c \tag{3.5.1}$$

是 V, V^* 与 $\mathbf{F}c$ 的空间直和.

(1) 在 $\mathcal{H}(V)$ 中定义括积如下:

$$[v_1+f_1+x_1c,\ v_2+f_2+x_2c]=(-f_2(v_1)+f_1(v_2))c \tag{3.5.2}$$

这里 $v_1, v_2 \in V$, $f_1, f_2 \in V^*$, $x_1, x_2 \in \mathbf{F}$. 则 $\mathcal{H}(V)$ 是 Heisenberg 代数，称其为由 V 生成的 Heisenberg 代数.

(2) 设 I, I^* 是 $H(V)$ 的线性变换，定义为

$$\begin{aligned} &I(v+f+x\,c) = v + x\,c, \\ &I^*(v+f+x\,c) = f + x\,c, \\ &\qquad v \in V,\ f \in V^*,\ x \in \mathbf{F}. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

则 I, $I^* \in \operatorname{Der}\mathcal{H}(V)$ 且 $[I,\ I^*] = 0$.

(3) 令

$$\mathfrak{m}(V) = \mathcal{H}(V) \dot{+} \mathbf{F}I \dot{+} \mathbf{F}I^*. \tag{3.5.4}$$

则 $\mathfrak{m}(V)$ 是李代数，且为交换李代数 $\mathbf{F}I \dot{+} \mathbf{F}I^*$ 经过 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}(V)$ 的非本质扩张.

证 (1) 显然，(3.5.2) 是反对称双线性的. 设 $v_i \in V$, $f_i \in V^*$, $x_i \in \mathbf{F}$, $i = 1, 2, 3$. 则 Jacobi 恒等式可从下面计算得到，

$$\begin{aligned} &[v_1 + f_1 + x_1\,c,\ [v_2 + f_2 + x_2\,c,\ v_3 + f_3 + x_3\,c]] \\ =& [v_1 + f_1 + x_1\,c,\ (f_2(v_3) - f_3(v_2))c] \\ =& 0. \end{aligned}$$

由 (3.5.2), 我们有

$$[\mathcal{H}(V),\ \mathcal{H}(V)] = \mathbf{F}c = C(\mathcal{H}(V)).$$

因此，$\mathcal{H}(V)$ 是 Heisenberg 代数.

(2) 显然，$[I,\ I^*] = 0$. 设 $v_i \in V$, $f_i \in V^*$, $x_i \in \mathbf{F}$, $i = 1, 2$. 则

$$\begin{aligned} &[I(v_1 + f_1 + x_1\,c),\ v_2 + f_2 + x_2\,c] \\ &\quad + [v_1 + f_1 + x_1\,c,\ I(v_2 + f_2 + x_2\,c)] \\ =& -f_2(v_1)c + f_1(v_2)c \\ =& I([v_1 + f_1 + x_1\,c,\ v_2 + f_2 + x_2\,c]). \end{aligned}$$

故 $I \in \mathrm{Der}\mathcal{H}(V)$. 类似地, $I^* \in \mathrm{Der}\mathcal{H}(V)$.

(3) 此结论是定理 1.3.1 的结果. □

注 我们称 $\mathfrak{m}(V)$ 为由 V 生成的 meta-Heisenberg 代数.

引理 2 设 $\mathfrak{s}$ 是一个半单李代数, V 是 $\mathfrak{s}$ 模. 则下面结果成立.

(1) V 生成的 meta-Heisenberg 代数 $\mathfrak{m}(V)$ 能成为 $\mathfrak{s}$ 模, 满足

$$a(v + f + x\,c + yI + zI^*) = a\,v + a\,f, \tag{3.5.5}$$

$$a \in \mathfrak{s},\ v \in V,\ f \in V^*,\ x,\ y,\ z \in \mathbf{F},$$

这里 $a\,f \in V^*$ 定义为

$$a\,f(v) = -f(a\,v), \tag{3.5.6}$$

而且 $\mathfrak{s}$ 在 $\mathfrak{m}(V)$ 的作用如同 $\mathfrak{m}(V)$ 的导子.

(2) 存在 $\mathfrak{s}$ 经过 $\mathfrak{m}(V)$ 的非本质扩张 $\mathfrak{g}$, 其根基为 $\mathfrak{m}(V)$, 幂零根基与 nil 根基均为 $\mathcal{H}(V)$.

证 (1) 容易验证 $\mathfrak{m}(V)$ 是一个 $\mathfrak{s}$ 模. 对于 $a \in \mathfrak{s}$, x_i, y_i, $z_i \in \mathbf{F}$, $v_i \in V$, $f_i \in V^*$, $i = 1, 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
&a([v_1 + f_1 + x_1c + y_1I + z_1I^*, v_2 + f_2 + x_2c + y_2I + z_2I^*]) \\
= &\ y_1av_2 + z_1af_2 - y_2av_1 - z_2af_1 \\
= &\ [a(v_1 + f_1 + x_1c + y_1I + z_1I^*), v_2 + f_2 + x_2c + y_2I + z_2I^*] \\
&+ [v_1 + f_1 + x_1c + y_1I + z_1I^*, a(v_2 + f_2 + x_2c + y_2I + z_2I^*)],
\end{aligned}$$

即 $\mathfrak{s}$ 在 $\mathfrak{m}(V)$ 上的作用如 $\mathfrak{m}(V)$ 的导子.

(2) 由定理 1.3.1,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dotplus \mathfrak{m}(V)$$

是 $\mathfrak{s}$ 经过 $\mathfrak{m}(V)$ 的非本质扩张. 因为 $\mathfrak{s}$ 是半单的, $\mathfrak{m}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想, 故 $\mathfrak{m}(V)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基, $\mathfrak{g}$ 的幂零根基为

$$[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{m}(V) = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{m}(V)] = \mathcal{H}(V).$$

又 $\mathcal{H}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想，即 $\mathfrak{g}$ 的 nil 根基.

现设 V 是交换李代数，于是 $E = \mathrm{id}_V \in \mathrm{Der}V$，所以

$$\mathfrak{n}(V) = V \dot{+} \mathbf{F}E, \tag{3.5.7}$$

是 $\mathbf{F}E$ 经过 V 的非本质扩张，其中括积为

$$[v_1 + x_1 E,\ v_2 + x_2 E] = x_1 v_2 - x_2 v_1, \tag{3.5.8}$$

$$v_1,\ v_2 \in V,\ x_1,\ x_2 \in \mathbf{F}.$$

如 $\mathfrak{s}$ 是半单李代数，V 是一个 $\mathfrak{s}$ 模，则有 $\mathfrak{s}$ 经过 $\mathfrak{n}(V)$ 的非本质扩张

$$\mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{n}(V),$$

满足

$$\begin{aligned} &[a_1 + v_1 + x_1 E,\ a_2 + v_2 + x_2 E] \\ =& [a_1,\ a_2] + a_1 v_2 + x_1 v_2 - a_2 v_1 - x_2 v_1 \\ & a_1,\ a_2 \in \mathfrak{s},\ v_1,\ v_2 \in V,\ x_1,\ x_2 \in \mathbf{F}. \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

定理 3 设 $\mathfrak{s}$ 是复半单李代数，$U_i,\ V_j,\ 1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n$ 是单 $\mathfrak{s}$- 模. 又设

$$\mathfrak{n} = \mathcal{H}(U_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}(U_m) \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n, \tag{3.5.10}$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{m}(U_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}(U_m) \oplus \mathfrak{n}(V_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}(V_n). \tag{3.5.11}$$

则存在一个完备李代数 $\mathfrak{g}$，其 Levi 子代数，根基，幂零根基与 nil 根基分别同构于 $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{n}$.

证 很明显，我们可以构造 $\mathfrak{s}$ 过 $\mathfrak{r}$ 的非本质扩张

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{r}.$$

因为 $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$ 各自是半单，可解的，所以 $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$ 分别是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数，根基. $\mathfrak{g}$ 的幂零根基为

$$[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}] = \mathfrak{n},$$

这也是 $\mathfrak{g}$ 的 nil 根基.

为证明 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数, 只要证明 $\mathfrak{g}$ 满足定理 3.3.3 中条件 (1)~(4).

设 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{s}$ 的一个 Cartan 子代数, $\mathfrak{s}$ 对 $\mathfrak{h}_0$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{h}_0\dot{+}\sum_{\alpha\in\Delta_0}\mathfrak{s}_\alpha.$$

设 U_i 的最高权为 λ_i, 权系为 Λ_i. 则 U_i^* 的最低权是 $-\lambda_i=\lambda_i^*$, 权系为 $\Lambda_i^*=-\Lambda_i$. 再设 V_j 的最高权, 权系为 σ_j, Σ_j. 又 U_i、U_i^* 和 V_j 对 $\mathfrak{h}_0$ 的权子空间分解各为

$$U_i=\sum_{\mu\in\Lambda_i}U_{i\,\mu},$$

$$U_i^*=\sum_{\mu\in\Lambda_i^*}U_{i\,\mu}^*,$$

和

$$V_j=\sum_{\mu\in\Sigma_j}V_{j\,\mu}.$$

容易证明

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0\dot{+}\sum_{i=1}^m\mathbf{C}I_i\dot{+}\sum_{i=1}^m\mathbf{C}I_i^*\dot{+}\sum_{j=1}^n\mathbf{C}E_j$$

是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 而且是交换的. 于是 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dot{+}\sum_{\alpha\in\Delta_0}\mathfrak{s}_\alpha\dot{+}\sum_{i=1}^m\Big(\sum_{\mu\in\Lambda_i}U_{i\,\mu}$$
$$\dot{+}\sum_{\mu\in\Lambda_i^*}U_{i\,\mu}^*\dot{+}\mathbf{C}c_i\Big)\dot{+}\sum_{j=1}^n\sum_{\mu\in\Sigma_j}V_{j\,\mu}.$$

显然，对任何 $h \in \mathfrak{h}$, $\operatorname{ad} h$ 是半单的.

现对 $\alpha \in \Delta_0$, 我们将 α 扩充到 $\mathfrak{h}$ 上为

$$\begin{cases} \alpha(h) = \alpha(h), & h \in \mathfrak{h}_0; \\ \alpha(I_i) = \alpha(I_i^*) = \alpha(E_j) = 0, & 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

将 $\mu \in \Lambda_\imath$ 扩充到 $\mathfrak{h}$ 上为

$$\begin{cases} \mu(h) = \mu(h), & h \in \mathfrak{h}_0; \\ \mu(I_k) = \delta_{i\,k}, & 1 \leq k \leq m; \\ \mu(I_k^*) = \mu(E_j) = 0, & 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

扩充 $\mu \in \Lambda_i^*$ 到 $\mathfrak{h}$ 上为

$$\begin{cases} \mu(h) = \mu(h), & h \in \mathfrak{h}_0; \\ \mu(I_k^*) = \delta_{i\,k}, & 1 \leq k \leq m; \\ \mu(I_k) = \mu(E_j) = 0, & 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

扩充 $\mu \in \Sigma_j$ 到 $\mathfrak{h}$ 上为

$$\begin{cases} \mu(h) = \mu(h), & h \in \mathfrak{h}_o; \\ \mu(E_k) = \delta_{j\,k}, & 1 \leq k \leq n; \\ \mu(I_i) = \mu(I_i^*) = 0, & 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

于是若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 是 Δ_0 的素根系，则

$$\begin{gathered} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_l, \\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m, \\ \lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \cdots,\ \lambda_m^*, \\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n \end{gathered}$$

是 $\mathfrak{h}^*$ 的基，且

$$\begin{gathered} \mathfrak{s}_{\pm\alpha_k},\ U_{i\,\lambda_i},\ U^*_{i\,\lambda_i^*},\ V_{j\,\sigma_j}, \\ 1 \leq k \leq l,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \end{gathered}$$

是 1 维的.

很明显, $-\lambda_i$, $-\lambda_i^*$, $-\sigma_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ 不是根, $-\alpha_k$, $1 \leq k \leq l$ 是根, 而且

$$[\mathfrak{s}_{\alpha_k},\ \mathfrak{s}_{-\alpha_k}] \neq (0).$$

显然, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{s}_{\pm\alpha_k}$, $U_{i\,\lambda_i}$, $U^*_{i\,\lambda_i^*}$, $V_{j\,\sigma_j}$, $1 \leq k \leq l$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ 生成 $\mathfrak{g}$.

所以 $\mathfrak{g}$ 满足条件 (1)~(4), 因而 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数. □

第四章　可解完备李代数

本章主要讨论可解完备李代数的一些性质. 可解完备李代数是由一个幂零李代数和其上的极大环面构成. 形式虽然简单, 但仍有许多问题有待进一步研究.

§4.1　一般性质

本节介绍的可解完备李代数的许多性质, 虽然有的早已得到, 但是却不是用完备李代数的语言. 我们均改用完备李代数的语言.

引理 1　设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, 且 $\dim\mathfrak{g} > 1$. 则

$$C(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}] \tag{4.1.1}$$

成立, 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 不能分解为 $\mathfrak{g}$ 的一个交换理想与另一理想的直和.

证　设 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_1$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的交换理想与理想, 并使

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1.$$

于是

$$\mathfrak{a} \subseteq C(\mathfrak{g}).$$

所以

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1^{(1)} \subseteq \mathfrak{g}_1.$$

这就导致 (4.1.1) 不成立.

反之, 设 (4.1.1) 不成立. 以 $\mathfrak{a}$ 表示 $C(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$ 在 $C(\mathfrak{g})$ 中的补子空间. 故 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的非零交换理想. 设 $\mathfrak{l}$ 为 $\mathfrak{a} + [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补子空间, 又

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} + [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}].$$

于是 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，而且

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_1.$$

如果 $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, 则 $\mathfrak{g}$ 是交换理想 $\mathfrak{a}$ 与理想 $\mathfrak{g}_1$ 的直和; 如果 $\mathfrak{g}_1 = 0$, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ 是交换李代数，又 $\dim \mathfrak{g} > 1$. 故 $\mathfrak{g}$ 是可分解的，且任何理想都是交换的. □

引理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，其中心 $C(\mathfrak{g}) \neq 0$, 又它的理想 $\mathfrak{h}$ 满足 $\mathrm{codim}\mathfrak{h} = 1$, $\mathfrak{h} \supseteq C(\mathfrak{g})$. 则 $[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})]$ 是 $C(\mathfrak{h})$ 的真子集，即

$$[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})] \subset C(\mathfrak{h}). \tag{4.1.2}$$

证 从 $\mathrm{codim}\mathfrak{h} = 1$, 我们可取 $e \in \mathfrak{g}$ 使得

$$\mathfrak{g} = \mathbf{F}e \dot{+} \mathfrak{h},$$

这里 $\mathbf{F}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基域. 又 $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$, 从而 $C(\mathfrak{h}) \lhd \mathfrak{g}$. 于是

$$[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})] = [\mathbf{F}e,\ C(\mathfrak{h})].$$

注意到 $\mathfrak{h} \supseteq C(\mathfrak{g})$, 故 $C(\mathfrak{g}) \subseteq C(\mathfrak{h})$. 从而有

$$\ker \mathrm{ad}e|_{C(\mathfrak{h})} \supseteq C(\mathfrak{g}) \neq 0.$$

于是

$$\dim C(\mathfrak{h}) > \dim[e,\ C(\mathfrak{h})].$$

因此 (4.1.2) 成立. □

定理 3 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，满足

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}, \tag{4.1.3}$$

$$C(\mathfrak{g}) \neq (0). \tag{4.1.4}$$

则

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g} \neq \mathrm{ad}\mathfrak{g}. \tag{4.1.5}$$

进一步，若 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解如下：

$$\mathfrak{g} = \mathbf{F}e \oplus \mathfrak{g}_1, \tag{4.1.6}$$

而且

$$[\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1, \tag{4.1.7}$$

$$C(\mathfrak{g}_1) = (0), \tag{4.1.8}$$

则存在 $\mathfrak{g}$ 的半单外导子. 否则存在外导子 D 使得 $D^2 = 0$.

证 首先我们证明，如果 $\mathfrak{g}$ 满足 (4.1.6), (4.1.7) 与 (4.1.8), 则存在半单外导子. 设线性变换 D 满足

$$D(\lambda e + x) = \lambda e,\ \lambda \in \mathbf{F},\ x \in \mathfrak{g}_1.$$

容易验证 D 是 $\mathfrak{g}$ 的半单导子. 由于 $e \in C(\mathfrak{g})$, 故 $D \notin \mathrm{ad}\mathfrak{g}$, 即 D 是 $\mathfrak{g}$ 的半单外导子. 顺便注意到在此情形，$\mathfrak{g}$ 一定满足 (4.1.3) 与 (4.1.4) 而且 $C(\mathfrak{g}) \not\subseteq \mathfrak{g}^{(1)}$.

在 $\mathfrak{g}$ 满足 (4.1.3) 与 (4.1.4) 的一般情形. 又可分为两种情况.

(1) $C(\mathfrak{g}) \not\subseteq \mathfrak{g}^{(1)}$. 由引理 1 的证明知，$\mathfrak{g}$ 有分解 (4.1.6).

如果 $[\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_1] \neq \mathfrak{g}_1$, 则可取线性变换 D 使得

$$D(\mathfrak{g}_1) = \mathbf{F}e,\ D\left(\mathbf{F}e + \mathfrak{g}_1^{(1)}\right) = 0.$$

显然

$$D^2 = 0,\ [D(\mathfrak{g}),\ \mathfrak{g}] = D([\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]) = 0.$$

所以 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 但 $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}x(y) = [x,\ y] \in \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_1^{(1)}.$$

所以 $D \notin \mathrm{ad}\mathfrak{g}$, 即 D 是外导子.

如果 $C(\mathfrak{g}_1) \neq 0$,. 取定 $x_0 \in C(\mathfrak{g}_1)$, $x_0 \neq 0$, 定义 D 如下：

$$D(\lambda e + x) = \lambda x_0,\ \lambda \in \mathbf{F},\ x \in \mathfrak{g}_1.$$

显然, $D^2=0$, 并从 $C(\mathfrak{g}_1)\subseteq C(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}^{(1)}=\mathfrak{g}_1^{(1)}$ 知 $D\in\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. 再从 $e\in C(\mathfrak{g})$ 知 D 是外导子.

(2) $C(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{g}^{(1)}$. 由 (4.1.3) 知存在 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{h}$ 使 $\operatorname{codim}\mathfrak{h}=1$. 从而

$$\mathfrak{h}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}\supseteq C(\mathfrak{g}).$$

从引理 1 有 $[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})]\subset C(\mathfrak{h})$. 取 $e\notin\mathfrak{h}$, $z\in C(\mathfrak{h})\backslash[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})]$ 及线性变换 D 使 $De=z$, $D(\mathfrak{h})=0$. 则 $D^2=0$. 又对 $x,\ y\in\mathfrak{h}$, $\lambda,\ \mu\in\mathbf{F}$ 我们有

$$D([\lambda e+x,\ \mu e+y])=0$$

及

$$\begin{aligned}&[D(\lambda e+x),\ \mu e+y]+[\lambda e+x,\ D(\mu e+y)]\\&=[\lambda z,\ \mu e+y]+[\lambda e+x,\ \mu z]\\&=\lambda\mu[z,\ e]+\lambda\mu[e,\ z]\\&=0.\end{aligned}$$

因此, $D\in\operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

如果 $D\in\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, 则存在 $\lambda\in\mathbf{F}$ 与 $x\in\mathfrak{h}$ 使得 $D=\operatorname{ad}(\lambda e+x)$. 但 $Dx=0$, 从而有

$$\lambda[e,\ x]=[\lambda e+x,\ x]=Dx=0.$$

如果 $\lambda\neq 0$, 则 $[e,\ x]=0$. 所以 $De=[\lambda e+x,\ e]=0$. 这与 $De=z\neq 0$ 矛盾. 如果 $\lambda=0$, 则 $D=\operatorname{ad}x$. 从 $D(\mathfrak{h})=0$ 有 $x\in C(\mathfrak{h})$. 于是 $z=De=[x,\ e]\in[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})]$ 而这与 $z\in C(\mathfrak{h})\setminus[\mathfrak{g},\ C(\mathfrak{h})]$ 矛盾. 所以 D 是 $\mathfrak{g}$ 的外导子. □

推论 设 $\mathfrak{g}$ 是可解李代数, $C(\mathfrak{g})\neq(0)$ 并且 $\dim\mathfrak{g}>1$. 则存在 $\mathfrak{g}$ 的外导子 D 使得 $D^2=0$.

证 从上面定理知 $\mathfrak{g}$ 有外导子; 而且只要证明 $\mathfrak{g}$ 有分解 (4.1.6) 时, $\mathfrak{g}_1^{(1)}\neq\mathfrak{g}_1$. 其实, 由 $\mathfrak{g}_1$ 继承了 $\mathfrak{g}$ 的可解性知这是显然的事实. □

定理 4　可解李代数 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数当且仅当 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

证　由完备李代数的定义知，$\mathfrak{g}$ 是完备李代数时 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

反之，当 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 时，由于 $\mathfrak{g}$ 可解，故 $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \mathfrak{g}$. 如果 $C(\mathfrak{g}) \neq 0$, 则由引理 3 有 $\mathrm{Der}\mathfrak{g} \neq \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. 这与假设矛盾. 故 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数　□

定理 5　设 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数，$\mathfrak{a}$ 为其交换理想，同时 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是幂零的. 则有下列结果.

(1) 存在一个子代数 $\mathfrak{b}$ 使得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}, \ \mathfrak{b} \simeq \mathcal{B} = \{ \mathrm{ad}b|_{\mathfrak{a}} \mid \forall b \in \mathfrak{b} \},$$

而且 $\mathcal{B}$ 是 $gl(\mathfrak{a})$ 的 Cartan 子代数.

(2) 又若 $\mathfrak{g}$ 的基域是代数封闭的，则 $\mathfrak{g}$ 是 2 维完备李代数的直和.

证　(1) 因为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是幂零的，我们有 $\mathfrak{g}^{\omega} \subseteq \mathfrak{a}$. 从引理 2.1.2 与引理 2.1.3, 可得

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\omega} \dot{+} \mathfrak{b},$$

这里 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想，且 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) = C(\mathfrak{g}^{\omega})$. 因为 $\mathfrak{a}$ 是交换的，所以

$$\mathfrak{a} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{\omega}) = C(\mathfrak{g}^{\omega}) = \mathfrak{g}^{\omega} \subseteq \mathfrak{a}.$$

因而 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^{\omega} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, 且 $C_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{b} = 0$. 这就推出 $\mathfrak{b} \simeq \mathcal{B} = \{ \mathrm{ad}b|_{\mathfrak{a}} \mid \forall b \in \mathfrak{b} \}$ 及 $\mathcal{B}$ 是 $gl(\mathfrak{a})$ 的幂零子代数. 设 $D \in \mathrm{N}_{gl(\mathfrak{a})}(\mathcal{B})$. 则有 $\mathfrak{g}$ 的线性变换 D_1 满足:

$$D_1 a = Da, \ \forall a \in \mathfrak{a}; \ \mathrm{ad}D_1 b|_{\mathfrak{a}} = [D, \ \mathrm{ad}b|_{\mathfrak{a}}], \ \forall b \in \mathfrak{b}.$$

于是，对 $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ 有

$$\begin{aligned} D_1([a, \ b] = D([a, \ b]) &= -D(\mathrm{ad}b|_{\mathfrak{a}}(a)) \\ &= -([D, \ \mathrm{ad}b|_{\mathfrak{a}}]a + \mathrm{ad}b|_{\mathfrak{a}}Da) \\ &= -([D_1 b, \ a] + [b, \ D_1 a]). \end{aligned}$$

由此易证 $D_1 \in \mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. 故有 $a_1 \in \mathfrak{a}$、$b_1 \in \mathfrak{b}$ 使得 $D_1 = \mathrm{ad}(a_1 + b_1)$. 于是 $D = D_1|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{ad}b_1|_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{B}$. 因而 $\mathcal{B}$ 是 $gl(\mathfrak{a})$ 的 Cartan 子代数.

(2) 因为 $\mathcal{B}$ 是 $gl(\mathfrak{a})$ 的 Cartan 子代数, 可取 $\mathfrak{a}$ 的基 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 及 $\mathcal{B}$ 的基 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足 $B_i a_j = \delta_{ij} a_j$, $1 \leq i, j \leq n$. 于是 $\mathfrak{b}$ 有基 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $[b_i, a_j] = \delta_{ij} a_j$. 再从 $\mathrm{ad}[b_i, b_j]|_{\mathfrak{a}} = [B_i, B_j] = 0$ 得出 $[b_i, b_j] = 0$. 所以 $\mathfrak{g}_i = L(a_i, b_i)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 2 维完备理想, 且

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n. \qquad \square$$

推论 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是交换的, 且 $\dim \mathfrak{g} = 2 \dim \mathfrak{a}$. $\square$

§4.2 可解完备李代数的结构

本节将讨论可解完备李代数的结构. 其实, 它们就是幂零李代数加上其上的极大环面. 为简单起见, 我们假定所讨论的李代数是复数域 $\mathbf{C}$ 上的有限维李代数.

定理 1 设 $\mathfrak{l}$ 是可解完备李代数. 则以下三个结论成立.

(1) $\mathfrak{l}$ 有分解:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n},$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{l}$ 的极大环面子代数, $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{l}$ 的极大幂零理想, 也是幂零根基.

(2) $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{n}$ 上的限制 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}|_{\mathfrak{n}}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{n}$ 的交换子代数, 也是 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面.

(3) $\mathfrak{h}$ 同构于 $\mathfrak{n}$ 上极大环面.

证 (1) 因为 $\mathfrak{l}$ 是完备的, 故可将其等同于 $\mathrm{ad}\mathfrak{l} = \mathrm{Der}\mathfrak{l}$. 由定理 1.2.3, 及 $\mathfrak{l}$ 的可解性, $\mathfrak{l}$ 有分解: $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}$. 其中, $\mathfrak{h}$ 是交换的, 而且 $\forall x \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}x$ 是半单线性变换; $\mathfrak{n}$ 是满足 $\forall y \in \mathfrak{n}$, $\mathrm{ad}y$ 为幂零线性变换的极大幂零理想.

由 $\mathfrak{l}$ 完备知, $\forall x \in \mathfrak{l}$ 存在唯一的 x_s、$x_n \in \mathfrak{l}$ 使得

$$(\mathrm{ad}x)_s = \mathrm{ad}x_s; \ (\mathrm{ad}x)_n = \mathrm{ad}x_n; \ x = x_s + x_n$$

和

$$\mathfrak{l} = \{x_s \mid x \in \mathfrak{l}\} + \{x_n \mid x \in \mathfrak{l}\}.$$

不难看出 $\mathfrak{h} = \{x_s \mid x \in \mathfrak{l}\}$、$\mathfrak{n} = \{x_n \mid x \in \mathfrak{l}\}$ 分别是 $\mathfrak{l}$ 的极大环面子代数与幂零根基.

(2) 设 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{n}$ 上极大环面，且 $\mathfrak{t} \supseteq \mathrm{ad}\mathfrak{h}|_{\mathfrak{n}}$. 对 $D \in \mathfrak{t}$, 我们定义

$$D \cdot h = 0,\ \forall h \in \mathfrak{h}.$$

易知 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{l}$. 故 $\exists h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathfrak{n}$ 使得 $D = \mathrm{ad}h + \mathrm{ad}n$. 但 D、$\mathrm{ad}h$ 都是半单的， $\mathrm{ad}n$ 是幂零的，所以 $\mathrm{ad}n = 0$, 于是 $n = 0$. 因而 $D \in \mathrm{ad}\mathfrak{h}|_{\mathfrak{n}}$, 2) 获证.

(3) 因 $\mathfrak{h}$ 是完备的，故 $C(\mathfrak{h}) = (0)$. 于是，对 h_1, $h_2 \in \mathfrak{h}$, $h_1 = h_2$, 当且仅当 $\mathrm{ad}h_1 = \mathrm{ad}h_2$. 从结论 1), 得 $\mathrm{ad}h_1 = \mathrm{ad}h_2$ 当且仅当 $\mathrm{ad}h_1|_{\mathfrak{n}} = \mathrm{ad}h_2|_{\mathfrak{n}}$. 因此 3) 成立. □

定理 2 当 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ 是可解完备李代数时，有

(1) $\mathfrak{l}$ 对 $\mathfrak{h}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \mathfrak{n}_\alpha,$$

其中

$$\mathfrak{n}_\alpha = \{x \in \mathfrak{n} | [h,\ x] = \alpha(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{n}.$$

(2) 存在 $\mathfrak{n}$ 的 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}|_{\mathfrak{n}}$-msg (简称 $\mathfrak{h}$-msg), $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ 使得 $e_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i}$, $1 \le i \le n$;

(3) $\forall h \in \mathfrak{h}$, $h \ne 0$, $\exists \alpha \in \Delta$ 使得 $\alpha(h) \ne 0$.

证 结论 1) 与 2) 是定理 1 和定理 1.3.3 的直接推论. 如果注意到 $h \in \mathfrak{h}$ 满足 $\alpha(h) = 0$, $\forall \alpha \in \Delta$. 则 $[h,\ \mathfrak{n}] = 0$. 又 $[h,\ \mathfrak{h}] = 0$, 于是 $h \in C(\mathfrak{l}) = 0$, 即 $h = 0$. 因此结论 3) 亦成立. □

推论 3 设 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ 是可解完备李代数， $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$ 如定理 1 所述. 则 $C(\mathfrak{n}) = C_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})$.

证 显然，$C(\mathfrak{n}) \subseteq C_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})$. 设 $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{n}$ 且 $x + h \in C_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n})$. 取 $\mathfrak{n}$ 的 $\mathfrak{h}$-msg $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 则有

$$[h + x, e_i] = \alpha_i(h)e_i + [x, e_i] = 0.$$

因而

$$\alpha_i(h)e_i = [h, e_i] = [x, e_i] = 0.$$

故

$$[h, \mathfrak{n}] = 0, \text{ i.e. } h \in C_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{n}).$$

但 $[h, \mathfrak{h}] = 0$. 所以 $h \in C(\mathfrak{l}) = (0)$. 因此结论得证. □

定理 4 设 $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{h}_i + \mathfrak{n}_i$, $i = 1, 2$ 是两个可解完备李代数，幂零根基为 $\mathfrak{n}_i$, $i = 1, 2$. 则 $\mathfrak{l}_1$ 与 $\mathfrak{l}_2$ 同构当且仅当 $\mathfrak{n}_1$ 与 $\mathfrak{n}_2$ 同构.

证 若 $\mathfrak{l}_1$ 同构于 $\mathfrak{l}_2$, 由 $\mathfrak{n}_i$ 是 $\mathfrak{l}_i$ 的幂零根基, 故 $\mathfrak{n}_1$ 同构于 $\mathfrak{n}_2$. 现设 φ 是 $\mathfrak{n}_1$ 到 $\mathfrak{n}_2$ 的同构映射. 由定理 1, $\mathfrak{h}_i$ 同构于 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}_i|_{\mathfrak{n}_i}$, 后者是 $\mathfrak{n}_i$ 上极大环面. 故可认为 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{n}_i$ 上的极大环面. 很明显，映射: $D \longrightarrow \varphi D \varphi^{-1}$, $\forall D \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{n}_1$ 是 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{n}_1$ 到 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{n}_2$ 的同构. 因此 $\varphi\mathfrak{h}_1\varphi^{-1}$ 是 $\mathfrak{n}_2$ 上的极大环面. 于是，存在 $\theta \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{n}_2$ 使得

$$\theta(\varphi\mathfrak{h}_1\varphi^{-1})\theta^{-1} = \mathfrak{h}_2.$$

定义 ρ 为

$$\rho(h_1 + x_1) = (\theta\varphi)h_1(\theta\varphi)^{-1} + (\theta\varphi)(x_1), \ h_1 \in \mathfrak{h}_1, \ x_1 \in \mathfrak{n}_1.$$

则能直接验证 ρ 是 $\mathfrak{l}_1$ 到 $\mathfrak{l}_2$ 的同构. □

上面的讨论清楚表明可解完备李代数一定是幂零李代数与它上面的极大环面之和. 但是反过来却不然. 特征幂零李代数与它上面的极大环面之和仍是特征幂零李代数, 自然不是完备李代数. n 维交换李代数是极大秩的幂零李代数, 它与它上面的极大环面之和是完备李代数. 因而, 幂零李代数与它上面的极大环面之和何时是完备的, 何时不是完备的是一个耐人寻味的, 尚未完全解决的问题.

§4.3　极大秩可解李代数

本节将讨论极大秩幂零李代数与其上的极大环面所构成的李代数. 这是一类可解完备李代数. 我们以后还要讨论这类代数与 Kac-Moody 代数的关系.

设 $\mathfrak{h}$ 是幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面. 则 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{n}$ 是可解李代数. 在本节中, 我们假定所讨论的可解李代数均是这类李代数, 并将 $\mathrm{rank}\mathfrak{n}$ 称为 $\mathfrak{l}$ 的秩.

定理 1　设 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ 是极大秩可解李代数, 并且 $\mathfrak{l}$ 对 $\mathfrak{h}$ 有根子空间分解为:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \dot{+} \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{n}_\alpha,$$

其中

$$\Delta \subset \mathfrak{t}^*,\ \mathfrak{n}_\alpha = \{x \in \mathfrak{n} | [h,\ x] = \alpha(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

则有以下结果:

(1)　存在 $\mathfrak{n}$ 的 $\mathfrak{h}$-msg

$$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$$

和 Δ 的子集

$$\Pi = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\},$$

使得

$$[h,\ x_i] = \alpha_i(h)x_i,\ \forall h \in \mathfrak{h},$$

即 $x_i \in \mathfrak{l}_{\alpha_i}$. 此时称

$$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$$

和根

$$\Pi = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$$

相对应.

(2) Π 是 $\mathfrak{h}^*$ 的基.

(3) 若 $\alpha \in \Delta$, 则存在唯一的 n 重组

$$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n),\ k_i \in \mathbf{Z}_+ = \mathbf{N} \cup \{0\}$$

使得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i.$$

从而 $\Delta \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$.

(4) 设 $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} k_i$, 又 p 为 $\mathfrak{n}$ 的**幂零度** (即, p 满足 $\mathfrak{n}^{p-1} \neq 0$, 但 $\mathfrak{n}^p = 0$), 则 $1 \leq |\alpha| \leq p$.

(5) $\forall \alpha \in \Delta \setminus \Pi$, 存在 $\alpha_i \in \Pi$ 使得 $\alpha - \alpha_i \in \Delta$.

(6) $\dim \mathfrak{n}_{\alpha_i} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$.

证 (1) 这是定理 1.3.3 的直接结果.

(2) 因为 $\mathfrak{l}$ 即 $\mathfrak{n}$ 是极大秩的, 所以 $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}] = n$. 再由 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{n}$ 上极大环面, $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的 $\mathfrak{h}$-msg, 得知 $h \in \mathfrak{h}$, $h = 0$, 当且仅当 $[h,\ x_i] = 0$, $1 \leq i \leq n$, 当且仅当 $\alpha_i(h) = 0$, $1 \leq i \leq n$. 因而 Π 是 $\mathfrak{h}^*$ 的基.

(3) 与 (6) 从 Π 是 $\mathfrak{h}^*$ 的基和 $\{x_i,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 是 $\mathfrak{h}$-msg 立即可得.

(4) 由幂零度的定义即可知道.

(5) 设 $\alpha \in \Delta \setminus \Pi$. 则有 $m > 1$,

$$[x_{i_1},\ [x_{i_2},\ \cdots\ [x_{i_{m-1}},\ x_{i_m}] \cdots]] \neq 0,$$

和

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{i_k} = \alpha.$$

显然, $\alpha - \alpha_{i_1} \in \Delta$. □

定理 2 设 $\mathfrak{n}$ 是极大秩幂零李代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{n}$ 上极大环面. 则 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ 是可解完备李代数.

证 由定理 1 知 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{l}$ 的 Cartan 子代数，且

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

生成 $\mathfrak{l}$. 不难看出 $\mathfrak{l}$ 满足 §3.3 中条件 (1)~(4). 因此 $\mathfrak{l}$ 为完备李代数. 自然，$\mathfrak{l}$ 是可解的. □

推论 3 两个极大秩可解李代数同构，当且仅当它们的幂零根基同构.

证 这是定理 2 与定理 2.4 的必然结果. □

定理 4 (1) 设 $\mathfrak{n}$ 是幂零李代数，并有理想直和分解：

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_t.$$

则 $\mathfrak{n}$ 是极大秩的，当且仅当 $\mathfrak{n}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$ 都是极大秩的.

(2) 极大秩可解完备李代数是单完备的，当且仅当其幂零根基是不可分解的.

证 (1) 设 $\mathfrak{h}_i$ 为 $\mathfrak{n}_i$ 上的极大环面 $(i = 1, 2, \cdots, t)$. 很明显，$\mathfrak{h} = \bigoplus\limits_{i=1}^{t} \mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面，且

$$\begin{aligned}\dim \mathfrak{h} &= \sum_{i=t}^{t} \dim \mathfrak{h}_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{t} \dim(\mathfrak{n}_i/[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_i]) \\ &= \dim(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]).\end{aligned}$$

故此，结论 (1) 成立.

(2) 设 $\mathfrak{l}$ 是极大秩可解完备李代数，但是不是单完备的. 则有 $\mathfrak{l}$ 的理想直和分解：$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$. 因此 $\mathfrak{l}$ 的幂零根基能分解为 $\mathfrak{l}_i$, $i = 1, 2$ 的幂零根基的直和.

现设 $\mathfrak{l}$ 是极大秩可解完备李代数，其幂零根基为 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. 则由结论 (1), $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ 都是极大秩的. 设 $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ 分别为 $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ 上

的极大环面. 则 $\mathfrak{l}_1=\mathfrak{t}_1+\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{l}_2=\mathfrak{t}_2+\mathfrak{n}_2$ 和 $\mathfrak{l}_1\oplus\mathfrak{l}_2$ 都是完备的. 从定理 2.4, $\mathfrak{l}$ 同构于 $\mathfrak{l}_1\oplus\mathfrak{l}_2$. 这意味着 $\mathfrak{l}$ 不是单完备的. □

§4.4 非极大秩可解完备李代数

定理 1 存在可解完备李代数, 其幂零根基不是极大秩的.

证 此定理可由下面例子证明. □

例 1 设 $\mathfrak{l}$ 为李代数, 其基 h_1,h_2,x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足:

$$[h_1,\ h_2]=0; \tag{4.4.1}$$

$$\begin{cases}[x_1,\ x_2]=x_4,\\ [x_1,\ x_4]=[x_2,\ x_3]=x_5,\\ [x_i,\ x_j]=0,\ \text{若}\ i+j>5;\end{cases} \tag{4.4.2}$$

$$\begin{cases}[h_1,\ x_i]=(\delta_{1i}+2\delta_{3i}+\delta_{4i}+2\delta_{5i})x_i,\\ [h_2,\ x_i]=(\delta_{2i}+\delta_{4i}+\delta_{5i})x_i.\end{cases} \tag{4.4.3}$$

则 $\mathfrak{l}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$, 这里 $\mathfrak{h}=L(h_1,\ h_2)$ 既是 $\mathfrak{l}$ 的极大环面子代数, 也是 Cartan 子代数, $\mathfrak{n}=L(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ 是 $\mathfrak{l}$ 的幂零根基. 很明显, $\mathfrak{h}$ 可看作 $\mathfrak{n}$ 上的环面, 并且 $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ 为 $\mathfrak{h}$-msg. $C(\mathfrak{l})=0$.

设 $D\in\mathrm{Der}\mathfrak{l}$ 且

$$Dh_i=\sum_{j=1}^{5}a_{ij}x_j+\sum_{j=1}^{2}b_{ij}h_j,\qquad i=1,\ 2;$$
$$Dx_i=\sum_{j=1}^{5}a_{i+2\,j}x_j+\sum_{j=1}^{2}b_{i+2\,j}h_j,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

用 (4.4.1), (4.4.2) 和 (4.4.3), 可得

$$\begin{aligned}Dh_1&=a_{11}x_1+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5,\\ Dh_2&=a_{22}x_2+a_{14}x_4+\frac{1}{2}a_{15}x_5,\\ Dx_1&=a_{31}x_1+a_{22}x_4+a_{14}x_5,\\ Dx_2&=a_{42}x_2-a_{11}x_4+\frac{1}{2}a_{13}x_5,\\ Dx_3&=2a_{31}x_3-a_{22}x_5.\end{aligned}$$

从这些可发现 $D=\mathrm{ad}x$, 其中 x 为

$$a_{31}h_1+a_{42}h_2-a_{11}x_1-a_{22}x_2$$
$$-\frac{1}{2}a_{13}x_3-a_{14}x_4-\frac{1}{2}a_{15}x_5.$$

因此 $\mathfrak{l}$ 是完备李代数, 其幂零根基 $\mathfrak{n}$ 的秩为 2, 而极小生成元组中元素数为 3. 所以 $\mathfrak{n}$ 不是极大秩的. □

为了讨论非极大秩可解完备李代数, 我们需推广定理 3.3.3.

引理 2 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 而且 $\mathfrak{h}$ 是交换的. 又 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\Delta\subset\mathfrak{h}^*\setminus(0)$, 并生成 $\mathfrak{h}^*$, 又

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{\,x\in\mathfrak{g}\,|\,[h,\ x]=\alpha(h)x,\ h\in\mathfrak{h}\,\}.$$

则有下面结果:

(1) $C(\mathfrak{g})=0$;

(2) 记 $\mathfrak{D}_0=\{\,\phi\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}\,|\,\phi(h)=0,\ h\in\mathfrak{h}\,\}$, 则

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathfrak{D}_0+\mathrm{ad}\mathfrak{g}. \tag{4.4.4}$$

证 (1) 因为 $\mathfrak{g}$ 的中心必在 Cartan 子代数中, 所以, 如果 $h\in C(\mathfrak{g})$, 则

$$[h,\ x_\alpha]=\alpha(h)x_\alpha,\ \forall\alpha\in\Delta,\ x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha.$$

注意到 Δ 生成 $\mathfrak{h}^*$, 故 $h=0$. 于是 (1) 成立.

(2) 设 $h\in\mathfrak{h}$, $D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$, $\beta\in\Delta$, $y_\beta\in\mathfrak{g}_\beta$ 且 $y_\beta\neq 0$. 进一步, 设

$$D(h)=h'+\sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha,\ x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,$$

$$D(y_\beta) = h'' + \sum_{\alpha\in\Delta} y'_\alpha,\ y'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha.$$

从 $D([h,\ y_\beta]) = \beta(h)D(y_\beta) = [D(h),\ y_\beta] + [h,\ D(y_\beta)]$, 我们知道

$$\beta(h)y'_\beta = \beta(h')y_\beta + \beta(h)y'_\beta.$$

所以

$$\beta(h') = 0,\ \forall\beta \in \Delta.$$

因为 Δ 生成 $\mathfrak{h}^*$, 所以 $h' = 0$. 这意味着

$$D(h) = \sum_{\alpha\in\Delta} x_\alpha.$$

现设

$$D' = D + \sum_{\alpha(h)\neq 0} (\alpha(h))^{-1}\mathrm{ad}x_\alpha.$$

显然

$$D'(h) = \sum_{\alpha(h)=0} x_\alpha.$$

如果还能证明 $D'(h) \in \mathfrak{h}$, 则由 $\mathfrak{h}$ 交换, 得 $D'(h) = 0$. 因而结论 (2) 也成立. 欲证 $D'(h) \in \mathfrak{h}$, 只要证 $[D'(h),\ h_1] = 0,\ \forall h_1 \in \mathfrak{h}$. 事实上, 从上面讨论知

$$\begin{aligned} D'(h_1) &= \sum_{\alpha\in\Delta} z_\alpha \\ &= \sum_{\alpha(h)=0} z_\alpha + \sum_{\alpha(h)\neq 0} z_\alpha, \end{aligned}$$

$$z_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha.$$

再由 $[h,\ h_1] = 0$, 有 $[D'(h),\ h_1] = [D'(h_1),\ h]$. 因此,

$$-\sum_{\alpha(h)=0} \alpha(h_1)x_\alpha$$

$$= -\sum_{\alpha(h)=0} \alpha(h) z_\alpha - \sum_{\alpha(h)\neq 0} \alpha(h) z_\alpha$$
$$= -\sum_{\alpha(h)\neq 0} \alpha(h) z_\alpha.$$

所以

$$\sum_{\alpha(h)=0} \alpha(h_1) x_\alpha = \sum_{\alpha(h)\neq 0} \alpha(h) z_\alpha = 0.$$

即 $[D'(h),\ h_1] = 0,\ \forall h_1 \in \mathfrak{h}$. □

定理 3 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，而且满足：

(1) $\mathfrak{h}$ 是交换的；

(2) $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\Delta \subset \mathfrak{h}^* \setminus (0)$，并生成 $\mathfrak{h}^*$，又

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\, x \in \mathfrak{g} \,|\, [h,\ x] = \alpha(h)x,\ h \in \mathfrak{h} \,\}.$$

(3) 在 Δ 中有 $\mathfrak{h}^*$ 的生成元组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_l$ 使得

$$\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1;$$

且 $\mathfrak{h}$ 与 $\{\mathfrak{g}_{\alpha_j},\ 1 \leq j \leq l\}$ 生成 $\mathfrak{g}$.

(4) 设 $x_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j}$, $x_j \neq 0$, 又 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 的基. 则对 $s\ (r+1 \leq s \leq l)$ 有

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{t} k_{i\,s} \alpha_{j_i} - \sum_{i=t+1}^{r} k_{i\,s} \alpha_{j_i},$$

这里 $k_{i\,s} \in \mathbf{N} \cup (0)$, $(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_r)$ 是 $(1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 的置换；忽略 $[\ ,\ ]$ 中的次序与括号的方式，有

$$[\underbrace{x_{j_1} \cdots x_{j_1}}_{k_{1\,s}\text{个}} \cdots \underbrace{x_{j_t} \cdots x_{j_t}}_{k_{t\,s}\text{个}} x_{k_1} \cdots x_{k_l}]$$

$$= [\underbrace{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_{t+1}}}_{k_{t+1\,s}\text{个}} \cdots \underbrace{x_{j_r} \cdots x_{j_r}}_{k_{r\,s}\text{个}} x_{k_1} \cdots x_{k_l}].$$

则 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数.

证 从引理 2 知，只要证明 $\mathfrak{D}_0 = \{\phi \in \mathrm{Der}\mathfrak{g} \,|\, \phi(h) = 0,\ h \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathrm{ad}\mathfrak{g}$. 设 $D \in \mathfrak{D}_0$, $\forall i\,(1 \le i \le l)$, $h \in \mathfrak{h}$ 则有

$$\begin{aligned}[h,\ D(x_i)] &= [h,\ D(x_i)] + [D(h),\ x_i] \\ &= D([h,\ x_i]) \\ &= \alpha_i(h)D(x_i).\end{aligned}$$

因为 $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1$, 所以

$$D(x_i) = d_i x_i,\ D \in \mathfrak{D}_0,\ x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i},\ 1 \le i \le l. \qquad (4.4.5)$$

由条件 (3), 可得

$$\begin{aligned}&D[\underbrace{x_{j_1} \cdots x_{j_1}}_{k_{1\,s}\text{个}} \cdots \underbrace{x_{j_t} \cdots x_{j_t}}_{k_{t\,s}\text{个}} x_{k_1} \cdots x_{k_l}] \\ &= D[\underbrace{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_{t+1}}}_{k_{t+1\,s}\text{个}} \cdots \underbrace{x_{j_r} \cdots x_{j_r}}_{k_{r\,s}\text{个}} x_{k_1} \cdots x_{k_l}].\end{aligned}$$

由此及 (4.4.2), 有

$$d_s = \sum_{i=1}^{t} k_{i\,s} d_i - \sum_{i=t+1}^{r} k_{i\,s} d_i,\ r+1 \le s \le l.$$

因为 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 的基，故存在 $h_0 \in \mathfrak{h}$ 使得

$$\alpha_i(h_0) = d_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

于是

$$\mathrm{ad}h_0(x_i) = d_i x_i = D(x_i),\ 1 \le i \le l;$$

$$\text{ad}h_0(h) = 0 = D(h), \ \forall h \in \mathfrak{h}.$$

即 $D = \text{ad}h_0$. 这样就证明了定理. □

容易看出, 例 1 中的李代数满足此定理的条件.

Virasoro 代数 $\tilde{\mathfrak{d}}$ 也是一个在物理学中常见的 (复) 李代数, 它有基 $d_i\,(i \in \mathbf{Z})$, c, 括积为:

$$[d_i, \ d_j] = (j-i)d_{i+j} + \frac{1}{12}(j^3 - j)\delta_{i,-j}c, \ i, \ j \in \mathbf{Z};$$

$$[c, \ d_i] = 0, \ \forall i \in \mathbf{Z}.$$

显然, $C(\tilde{\mathfrak{d}}) = \mathbf{C}c$.

定理 4 无限维 Witt 代数

$$\mathfrak{d} = \tilde{\mathfrak{d}}/\mathbf{C}c$$

是完备李代数.

证 可以假定 $d_i\,(i \in \mathbf{Z})$ 是 $\mathfrak{d}$ 的基, 并有括积:

$$[d_i, \ d_j] = (j-i)d_{i+j}.$$

于是 $\mathfrak{d}$ 由 d_0, $d_{\pm 1}$, $d_{\pm 2}$ 生成, $\mathbf{C}d_0$ 是 Cartan 子代数, 根系为

$$\Delta = \{\alpha_i \,|\, i = \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots\},$$

这里 $\alpha_1(d_0) = 1$, 且

$$\mathfrak{d}_{\alpha_i} = \mathbf{C}d_i, \ i = \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots.$$

显然, $\mathfrak{d}$ 满足定理 3 的条件. 因此是完备李代数. □

定理 5 设 $\mathfrak{d}$ 及 $d_i\,(i \in \mathbf{Z})$ 如定理 4 所述. 又

$$\mathfrak{d}_+ = \sum_{i \geq 0} \mathbf{C}d_i.$$

则下面结果成立.

(1) $\mathfrak{d}_+$ 是完备李代数.

(2) 对 $n \in \mathbf{N}$, 李代数

$$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_+ / \sum_{i \geq n} \mathbf{C} d_i$$

是可解李代数.

(3) $\mathfrak{d}_n$ 是完备李代数, 当且仅当 $n = 2$ 或 $n \geq 6$.

证 (1) 容易验证 $\mathfrak{d}_+$ 满足定理 3 的条件, 因而是完备的.

(2) 此结论非常明显.

(3) $n = 1$, 因为 $\dim \mathfrak{d}_1 = 1$, 故 $\mathfrak{d}_1$ 不是完备的.

$n = 2$, 由 $\dim \mathfrak{d}_2 = 2$ 和 $\mathfrak{d}_2$ 非交换, 故 $\mathfrak{d}_2$ 是完备的.

$n = 3$, $\mathfrak{d}_3$ 的幂零根基是 2 维交换的, 故其上的极大环面应是 2 维的. 于是 $\mathfrak{d}_3$ 不是完备的.

$n = 4$, $\mathfrak{d}_4$ 的幂零根基是 3 维 Heisenberg 代数, 其上的极大环面应是 2 维的. 故 $\mathfrak{d}_4$ 不是完备的.

$n = 5$, 设 π 是 $\mathfrak{d}_+$ 到 $\mathfrak{d}_5$ 的自然同态. 又

$$\pi(d_1),\ \pi(d_2),\ \pi(d_3),\ \pi(d_4)$$

是 $\mathfrak{d}_5$ 的幂零根基 $\mathfrak{n}$ 的基.

$$\{\,\pi(d_1),\ \pi(d_2)\,\}$$

是 $\mathfrak{n}$ 的极小生成元组. $\mathfrak{n}$ 中的线性变换 h_1, h_2 在

$$\pi(d_1),\ \pi(d_2),\ \pi(d_3),\ \pi(d_4)$$

下的矩阵分别为:

$$\mathrm{diag}(1\ 0\ 1\ 2), \mathrm{diag}(0\ 1\ 1\ 1).$$

容易看到 $h_1,\ h_2 \in \mathrm{Der}\mathfrak{n}$. 故 $\mathfrak{n}$ 的秩为 2. 因此 $\mathfrak{d}_5$ 不是完备的.

$n \geq 6$, 设 π 是 $\mathfrak{d}_+$ 到 $\mathfrak{d}_n$ 的自然同态. 故 $\pi(d_0), \pi(d_1), \cdots, \pi(d_{n-1})$ 是 $\mathfrak{d}_n$ 的基. 因为

$$[\pi(d_0),\ \pi(d_i)] = i\pi(d_i),\ 0 \leq i \leq 5.$$

并且 $\pi(d_0)$, $\frac{\sqrt{6}}{6}\pi(d_1)$, $\pi(d_2)$ 生成 $\mathfrak{d}_n$, 又

$$\begin{aligned}
&[\pi(d_2),\ [\frac{\sqrt{6}}{6}\pi(d_1),\ \pi(d_2)]] \\
&= [\frac{\sqrt{6}}{6}\pi(d_1), [\frac{\sqrt{6}}{6}\pi(d_1),\ [\frac{\sqrt{6}}{6}\pi(d_1),\ \pi(d_2)]]] \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

因此, $\mathfrak{d}_n$ 是完备李代数. □

除 $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_+$ 与 $\mathfrak{d}_n$, $(n \neq 1,\ 3,\ 4,\ 5)$ 外, 还有李代数满足定理 3 的条件. 下面就是一个例子.

例 2 设李代数 $\mathfrak{g}$ 有基 h_1, h_2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y, 括积为:

$$\begin{aligned}
&[x_1,\ x_j] = (1 - \delta_{1j})x_{1+j}, && 1 + j \leq 5; \\
&[x_1,\ x_j] = 0, && 1 + j > 5; \\
&[x_2,\ x_j] = 0, && j \neq 1; \\
&[x_i,\ y] = \delta_{i2}x_5; && \\
&[h_i,\ h_j] = 0, && 1 \leq i, j \leq 2; \\
&[h_1,\ x_i] = (\delta_{i1} + \delta_{i3} + 2\delta_{i4} + 3\delta_{i5})x_i; && \\
&[h_1,\ y] = 3y; && \\
&[h_2,\ x_i] = (1 - \delta_{i1})x_i; && \\
&[h_2,\ y] = 0. &&
\end{aligned}$$

容易验证此李代数满足定理 3 的条件, 因此是完备的. 但是它不是定理 5 中的类型. □

最后我们举一个不满足定理 3 的条件的完备可解李代数的例子.

例 3 设 $\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{19} \mathbf{C}x_i$ 是一个李代数，其结构常数 C_{ij}^k 为 ±1 或 0, 其中为 1 的如下：

$$C_{34}^8 \quad C_{56}^9 \quad C_{13}^{10} \quad C_{25}^{11} \quad C_{73}^{12} \quad C_{75}^{13} \quad C_{23}^{14}$$

$$C_{15}^{15} \quad C_{18}^{16} \quad C_{29}^{16} \quad C_{78}^{17} \quad C_{79}^{17} \quad C_{28}^{18} \quad C_{19}^{19}$$

容易验证

$$\mathfrak{n}^2 = \sum_{i=8}^{19} \mathbf{C}x_i; \ \ \mathfrak{n}^3 = \sum_{i=10}^{19} \mathbf{C}x_i; \ \ \mathfrak{n}^4 = 0.$$

因而 $\mathfrak{n}$ 是幂零李代数，极小生成元组含 7 个元素，幂零度为 3. 存在 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面 $\mathfrak{h}$ 使得 x_i, $1 \leq i \leq 7$ 为 $\mathfrak{h}$-msg, 且 $\dim \mathfrak{h} = 5$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系为

$$\begin{aligned} \Delta = \{ \ & \alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4, \ \alpha_5, \ \alpha_1 + \alpha_3, \\ & \alpha_1 + \alpha_5, \ \alpha_2 + \alpha_3, \ \alpha_2 + \alpha_5, \ \alpha_3 + \alpha_4, \\ & \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \ \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 \}. \end{aligned}$$

对 $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{g}_\alpha$ 的基如下表：

α_1	x_1, x_2	$\alpha_1 + \alpha_3$	x_{10}	$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$	x_{16}, x_{19}
α_2	x_7	$\alpha_1 + \alpha_5$	x_{15}	$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	x_{17}, x_{18}
α_3	x_3	$\alpha_2 + \alpha_3$	x_{12}, x_{14}	$\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5$	x_6
α_4	x_4	$\alpha_2 + \alpha_5$	x_{11}, x_{13}		
α_5	x_5	$\alpha_3 + \alpha_4$	x_8, x_9		

$\mathfrak{h}$ 有基 h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 使得

$$\alpha_i(h_j) = \delta_{ij}, \ 1 \leq i, j \leq 5.$$

因此，(4.4.1) 成立．设 $D \in \mathfrak{D}_0$．因为 $D(h)=0$，所以 $\forall \alpha \in \Delta$，$h \in \mathfrak{h}$，$x \in \mathfrak{g}_\alpha$，我们有

$$[h,\ D(x)] = D([h,\ x]) - [D(h),\ x] = \alpha(h)D(x).$$

这意味着 $D(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$．于是

$$\begin{aligned} D(x_1) &= k_1x_1 + k_2x_2, \\ D(x_2) &= l_1x_1 + l_2x_2, \\ D(x_i) &= k_ix_i,\ 3 \le i \le 7. \end{aligned}$$

用下面关系

$$\begin{aligned} [x_1,\ [x_3,\ x_4]] &= [x_2,\ [x_5,\ x_6]], \\ [x_7,\ [x_3,\ x_4]] &= [x_7,\ [x_5,\ x_6]], \end{aligned}$$

可得

$$k_2 = l_1 = 0,\ \ l_2 = k_1.$$

进而，可得

$$D = \operatorname{ad}(k_1h_1 + k_7h_2 + k_3h_3 + k_4h_4 + k_5h_5) \in \operatorname{ad}\mathfrak{g}.$$

因此 $\mathfrak{g}$ 是非极大秩的可解完备李代数．从 $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_1} = 2$ 得知，$\mathfrak{g}$ 不满足定理 3 中条件 (3)． □

极大秩可解完备李代数的分类归结为极大秩幂零李代数的分类，而后者的分类有赖于 Kac-Moody 代数．我们将在下章讨论．

但是，总的说来，可解完备李代数的研究远远没有完成，甚至可说仅仅是开始．仍有许多问题有待发掘，解决．

第五章　完备李代数的若干问题

完备李代数理论近年虽然有一些进展，但是其发展仍然是不充分的．至今仍有许多问题需要解决．我们在这一章中提出一些问题，这些问题多多少少已有一些讨论．其实，还有许多问题至今尚未开始研究，或者基本没有研究，这些就更值得去探讨了．

§5.1　完备李代数的 Killing 型与极大环面

前面已经知道完备李代数的 Killing 型一般说来是退化的，因而其价值就不如半单李代数的 Killing 型．但在本节中我们将看到完备李代数的 Killing 型在其极大环面上的限制是非退化的，而且利用这种非退化性可以给出完备李代数为单完备李代数的一个条件．本节所讨论的李代数均为有限维复李代数．

定义 1　如果李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{t}$ 中任何元素都是半单的，即 $\mathrm{ad}x$ $(x \in \mathfrak{t})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单线性变换，则称 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的**环面子代数**，又若任何真包含 $\mathfrak{t}$ 的子代数不是环面子代数，则称 $\mathfrak{t}$ 为**极大环面子代数**．

引理 1　环面子代数是交换李代数．

证　设 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的环面子代数，$x \in \mathfrak{t}$, $\mathrm{ad}x$ 在 $\mathfrak{t}$ 上的限制记为 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}x$．设 $y \in \mathfrak{t}$ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}x$ 的属于特征值 λ 的特征向量，故有

$$[x,\ y] = \lambda y \text{ 或 } [y,\ x] = -\lambda y.$$

因为 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}y$ 是半单的，故有

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i;\ [y,\ x_i] = \mu_i x_i.$$

当 $i \neq j$ 时, $\mu_i \neq \mu_j$. 于是

$$-\lambda y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i.$$

注意到 y 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} y$ 的属于 0 的特征向量, 于是

$$k = 1,\ \lambda = \mu_1 = 0.$$

即 $\mathfrak{t}$ 是交换的. □

定理 2 设 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数, 并有如 (2.4.6) 的分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n},$$

其中, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数, 根基, 极大幂零理想. 又设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数. 则有以下结果.

(1) $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的环面子代数, 且 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{t}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{5.1.1}$$

其中 $\Delta \subset \mathfrak{t}^* \setminus (0)$,

$$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} | [t,\ x] = 0,\ \forall t \in \mathfrak{t}\},$$
$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | [t,\ x] = \alpha(t)x,\ \forall t \in \mathfrak{t}\}.$$

(2) $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数.

(3) Δ 线性生成 $\mathfrak{t}^*$.

(4) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{t}$ 上的限制 $\langle\, \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2 \,\rangle$ 是非退化的.

证 (1) 因为 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{a}$ 中的元素都是半单的, 又它们可换, 故 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的环面子代数. 进而 $\mathfrak{g}$ 有分解 (5.1.1).

(2) 设 $\mathfrak{t}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的环面子代数, 且 $\mathfrak{t}_1 \supseteq \mathfrak{t}$, 于是

$$\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{t}_1 \subseteq \mathfrak{g}_0(\mathfrak{t}),$$
$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}.$$

又 $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n}$ 中元素都是幂零的, 故 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1$. 因此 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数.

(3) 令 $L(\Delta)$ 是 Δ 生成的 $\mathfrak{t}^*$ 的子空间, 若 $L(\Delta) \neq \mathfrak{t}^*$, 则有 $t \in \mathfrak{t}$, $t \neq 0$, 使得

$$\alpha(t) = 0, \forall \alpha \in \Delta,$$

于是 $t \in C(\mathfrak{g})$, 矛盾. 于是 3) 成立.

(4) 由 (5.1.1), 对 $t \in \mathfrak{t}$, $\mathrm{ad}t$ 满足

$$\mathrm{ad}t(x_\alpha) = \alpha(t)x_\alpha, \ x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \ \alpha \in \Delta.$$

于是有 $\mathfrak{g}$ 的唯一的线性变换 $\bar{\mathcal{T}}$ 满足

$$\bar{\mathcal{T}}(x_\alpha) = \overline{\alpha(t)}x_\alpha, \ x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \ \alpha \in \Delta, \tag{5.1.2}$$

这里 $\overline{\alpha(t)}$ 是 $\alpha(t)$ 的共轭复数. 显然

$$\overline{(\alpha+\beta)(t)} = \overline{\alpha(t) + \beta(t)} = \overline{\alpha(t)} + \overline{\beta(t)},$$

再由

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \ \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta},$$

易证

$$\bar{\mathcal{T}} \in \mathrm{Der}\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\mathfrak{g}.$$

因为

$$\bar{\mathcal{T}}\mathrm{ad}x = \mathrm{ad}x\bar{\mathcal{T}}, \ x \in \mathfrak{t},$$

于是有 $\bar{t} \in \mathfrak{t}$, 使得

$$\mathrm{ad}\bar{t} = \bar{\mathcal{T}}. \tag{5.1.3}$$

若 $t \in \mathfrak{t}$, $t \neq 0$, 由结论 (3) 知有 $\alpha \in \Delta$, 使得 $\alpha(t) \neq 0$, 因此

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}t\,\mathrm{ad}\bar{t} = \sum_{\beta\in\Delta} \dim \mathfrak{g}_\beta \beta(t)\overline{\beta(t)} > 0. \tag{5.1.4}$$

即 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{t}$ 的限制是非退化的. □

从上面的证明知, 对 $t \in \mathfrak{t}$, 由 (5.1.2) 确定唯一的 $\bar{t} \in \mathfrak{t}$. 因此, 我们得到 $\mathfrak{t}$ 到自身的映射 τ:

$$\tau(t) = \bar{t}, \ \forall t \in \mathfrak{t}. \tag{5.1.5}$$

定理 3 完备李代数 $\mathfrak{g}$ 的极大环面子代数 $\mathfrak{t}$ 的映射 τ 满足以下条件.

(1) τ 是 $\mathfrak{t}$ 的 **半对合**, 即有

$$\begin{cases} \tau^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{t}}; \\ \tau(t_1 + t_2) = \tau(t_1) + \tau(t_2), \quad t_1,\ t_2 \in \mathfrak{t}; \\ \tau(\lambda t) = \bar{\lambda}\tau(t), \quad \lambda \in \mathbf{C},\ t \in \mathfrak{t}. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

(2) $\mathfrak{t}$ 的子集

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_0 &= \{t \in \mathfrak{t} | \tau(t) = t\} \\ &= \{t \in \mathfrak{t} | \alpha(t) \in \mathbf{R},\ \forall \alpha \in \Delta\} \end{aligned}$$

是实线性空间, 与 $\mathfrak{t}$ 有相同的维数 (称为 $\mathfrak{t}$ 的 **实形式**), 且 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{t}_0$ 上的限制是正定的.

(3) 对 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ 有唯一的 $t_\mu \in \mathfrak{t}$ 使得

$$\mu(t) = \langle t_\mu,\ t\rangle,\ \forall t \in \mathfrak{t},$$

而且有

$$t_{\mu+\nu} = t_\mu + t_\nu,\ t_{k\mu} = k t_\mu,$$

又

$$t_\alpha \in \mathfrak{t}_0, \forall \alpha \in \Delta.$$

(4) $\mathfrak{t}^*$ 的子集

$$\mathfrak{t}_0^* = \{\mu \in \mathfrak{t}^* | \mu(t_0) \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathfrak{t}_0\}$$

是实线性空间，可视为 $\mathfrak{t}_0$ 的对偶空间，且

$$\Delta \subset \mathfrak{t}_0^*.$$

证 (1) 与 (2) 可由直接计算与 (5.1.2) 得到.

在 $\mathfrak{t}_0$ 中取基 $t_1, t_2, \ldots, t_n$. 则

$$\boldsymbol{T} = (\langle t_i,\ t_j\rangle)$$

是正定矩阵，因而可逆. 对 $\mu \in \mathfrak{t}^*$, 设

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mu(t_1) \\ \mu(t_2) \\ \vdots \\ \mu(t_n) \end{pmatrix}.$$

令

$$t_\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i t_i,$$

则

$$\langle t_\mu, t\rangle = \mu(t), \quad \forall t \in \mathfrak{t}^*.$$

由于 $\alpha(t_i) \in \mathbf{R}$, 故 $t_\alpha \in \mathfrak{t}_0$. (3) 的其余结论是显然的.

从 (1), (2) 及 (3) 可得 (4). □

由此定理，我们可以将 $\mathfrak{t}^*$ 与 $\mathfrak{t}$ 等同起来. 即将 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ 与 t_μ 等同，而且有

$$\langle \alpha,\ \alpha\rangle > 0, \forall \alpha \in \Delta. \tag{5.1.7}$$

引理 4 设 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ 使得 $\langle \Delta_1,\ \Delta_2\rangle = 0$. 又若 $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$, 则 $\alpha + \beta \neq 0$ 且 $\alpha + \beta \notin \Delta$.

证 若 $\alpha + \beta = 0$, 则由 (5.1.7),

$$0 = \langle \alpha,\ \beta\rangle = \langle \alpha,\ -\alpha\rangle < 0.$$

这是矛盾.

若 $\alpha+\beta\in\Delta_1$, 再由 (5.1.7),

$$0=\langle\alpha+\beta,\ \beta\rangle=\langle\beta,\ \beta\rangle>0$$

也是矛盾.

类似, $\alpha+\beta\in\Delta_2$ 也产生矛盾. 于是引理成立. □

引理 5 设

$$\mathfrak{t}_1=\bigcap_{\beta\in\Delta_2}\ker\beta,\ \mathfrak{t}_2=\bigcap_{\alpha\in\Delta_1}\ker\alpha.$$

则有以下结论.

(1) $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_1\dot{+}\mathfrak{t}_2$.

(2) 若 $\alpha\in\Delta_1$, $\beta\in\Delta_2$, 则

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_\beta]=[\mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{g}_\beta]=[\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{t}_2]=0.$$

证 因为 $\langle\Delta_1,\ \Delta_2\rangle=0$, 所以

$$L(\Delta)=L(\Delta_1)\dot{+}L(\Delta_2).$$

于是 (1) 成立.

从引理 4 及 $\mathfrak{t}_i$, $i=1, 2$ 的定义可得 (2). □

引理 6 设 $\mathfrak{g}_i$, $(i=1, 2)$ 为 $\mathfrak{t}_i$ 与 $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha\in\Delta_i)$ 生成的子代数. 则有下面结论.

(1) $[\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2]=0$.

(2) $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 都是理想.

(3) $C(\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2)=0$.

(4) $\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2=0$.

证 (1) 从引理 5 的 (2) 可立即得到. 显然

$$[\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{t}]=0,$$
$$[\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_\alpha]\subseteq\mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha\in\Delta,$$
$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2.$$

于是 (2) 成立.

注意到 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{n}$, 故 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$ 由幂零元组成. 设 $C(\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2) \neq 0$, 由 Engel 定理

$$C_{C(\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2)}(\mathfrak{g}_0) \neq 0.$$

然而, 左边是在 $C(\mathfrak{g})=0$ 中, 得到矛盾, 故 (3) 成立.

(4) 可由 (3) 及下面事实

$$\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \subseteq C(\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2)$$

得到. □

由 §2.4, $[\mathfrak{s}+\mathfrak{a},\ \mathfrak{n}]$ 生成的子代数 $\mathfrak{u}_1$ 是一个幂零理想.

引理 7 $\mathfrak{u}_1 = (\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{g}_2)$.

证 注意到

$$\mathfrak{t} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

故

$$\mathfrak{s}+\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

因为 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 是理想, 并包含 $[\mathfrak{s}+\mathfrak{a},\ \mathfrak{n}]$, 故

$$\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

设 $\mathfrak{n}'$ 是 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 的极大幂零理想. 则有

(1) $\mathfrak{n}' = (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}') \oplus (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}')$.

(2) $\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}$.

注意到 $[\mathfrak{s}+\mathfrak{a},\ \mathfrak{u}_1]$ 生成 $\mathfrak{u}_1$. 于是由 (2), $[\mathfrak{s}+\mathfrak{a},\ \mathfrak{n}']$ 也生成 $\mathfrak{u}_1$, 再由 (1),

$$\mathfrak{u}_1 = (\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{g}_2).$$ □

令

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{s}+\mathfrak{a},$$
$$U_0 = \mathrm{Der}\mathfrak{u}_1,\ \tau(x) = \mathrm{ad}x|_{\mathfrak{u}_1},\ x \in \mathfrak{g}.$$

在 §2.4 中是将 U_0 记为 U_1. 回忆在该节我们证明了

$$\tau(\mathfrak{a}+C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}))=C_{U_0}(\tau(\mathfrak{m})). \tag{5.1.8}$$

引理 8 令

$$U_i=\mathrm{Der}(\mathfrak{u}_1\cap\mathfrak{g}_i),\ i=1,\ 2.$$

则

(1) $C_{U_0}(\tau(\mathfrak{m}))=C_{U_1}(\tau(\mathfrak{m}))\oplus C_{U_2}(\tau(\mathfrak{m}))$.

(2) $C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})=\mathfrak{k}_1\oplus\mathfrak{k}_2$, 其中

$$\mathfrak{k}_1=(C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_2)),$$
$$\mathfrak{k}_2=(C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1)).$$

证 因为 (5.1.8) 及 $\mathfrak{u}_1\cap\mathfrak{g}_i$ 是理想, 在 $C_{U_0}(\tau(\mathfrak{m}))$ 下不变, 故 (1) 成立.

从 (1) 有

$$C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})=(C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}_1\cap\mathfrak{g}_1))\oplus(C_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}_1\cap\mathfrak{g}_2)).$$

由引理 6 之 (3), $C(\mathfrak{g}_i)=(0)$. 由 [37] 的 **2.4** 知

$$C_{\mathfrak{g}}((\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}_i)+(\mathfrak{u}_1\cap\mathfrak{g}_i))=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_i),\ i=1,\ 2.$$

于是结论 (2) 成立. □

定理 9 设 $\mathfrak{g}$ 是一个完备李代数, $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极大环面子代数, Δ 是 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{t}$ 的非零根系. $\langle\ ,\ \rangle$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{t}$ 上的限制. $\mathfrak{g}$ 为非单完备李代数当且仅当 Δ 满足

$$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2,\ \Delta_i\neq\phi;$$
$$\langle\Delta_1,\ \Delta_2\rangle=0.$$

证 现设 $\mathfrak{g}$ 是完备的, 但非单完备的. 于是有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,$$

这里 $\mathfrak{g}_i \neq 0$, $i = 1, 2$, and $\mathfrak{g}_i$ 也是完备的. 设 $\mathfrak{t}_1$ (相应 $\mathfrak{t}_2$) 是 $\mathfrak{g}_1$ (相应 $\mathfrak{g}_2$) 的极大环面子代数, Δ_1 (相应 Δ_2) 是 $\mathfrak{g}_1$ (相应 $\mathfrak{g}_2$) 对 $\mathfrak{t}_1$ (相应 $\mathfrak{t}_2$) 的非零根的集合. 若 $\mathfrak{t}_i = 0$ 或 $\Delta_i = \phi$, 则 $C(\mathfrak{g}_i) \neq 0$, 故 $C(\mathfrak{g}) \neq 0$. 因而

$$\mathfrak{t}_i \neq 0 \text{ 且 } \Delta_i \neq \varnothing, \ i = 1, 2.$$

设 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$. 则 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ 且 $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = 0$.

反之, 设 $\mathfrak{g}$ 是完备的, 且 Δ 有上述分解. 则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + C_n(\mathfrak{m}) + \mathfrak{u}_1,$$

$$C_n(\mathfrak{m}) = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2$$

和

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{u}_1 \subseteq \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2.$$

于是

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{k}_1) + (\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{k}_2).$$

由引理 6 与引理 8,

$$[\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{k}_1, \ \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{k}_2] = 0.$$

因此 $(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{k}_1) \cap (\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{k}_2)$ 包含在 $C(\mathfrak{g})$ 中, 必为 (0), 所以

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{k}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{k}_2).$$

$\mathfrak{g}$ 是非单完备的. □

§5.2 完备李代数与 Kac-Moody 代数

本节主要讨论完备李代数与 Kac-Moody 代数的一些关系. 首先证明 Kac-Moody 代数及其抛物子代数是完备李代数当且仅当此代数对应的矩阵是非退化的. 此结果对广义 Kac-Moody 代数也是成立的. 其次讨论极大秩可解完备李代数.

定义 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{Z}^{n\times n}$, 如果满足

(1) $a_{ii}=2$;

(2) $i\neq j$ 时, $a_{ij}\leq 0$;

(3) $a_{ij}=0$ 当且仅当 $a_{ji}=0$,

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个 **广义 Cartan 矩阵**, 简记为 GCM.

比广义 Cartan 矩阵更一般的是下面的广义的"广义 Cartan 矩阵".

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 如果满足

(1) $a_{ii}=2$ 或 $a_{ii}\leq 0$;

(2) $i\neq j$ 时, $a_{ij}\leq 0$, 而且当$a_{ii}=2$ 时, $a_{ij}\in\mathbf{Z}$;

(3) $a_{ij}=0$ 当且仅当 $a_{ji}=0$,

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个 **广义的 GCM**, 简记为 GGCM.

所谓 $\boldsymbol{A}$ 的一个实现是一个三重系

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{h},\ \Pi,\ \Pi^\vee),\\
&\Pi=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\},\\
&\Pi^\vee=\{\alpha_1^\vee,\ \alpha_2^\vee,\ \cdots,\ \alpha_n^\vee\},
\end{aligned}
$$

其中 $l=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$, $\mathfrak{h}$ 是 $2n-l$ 维复线性空间, $\Pi^\vee$ 是 $\mathfrak{h}$ 的线性无关向量组, Π 是 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 的线性无关向量组, 且

$$\langle\alpha_i^\vee,\ \alpha_j\rangle=a_{ij},\ 1\leq i,\ j\leq n.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是广义 Cartan 矩阵, 则可定义 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$. 此代数有如下根子空间分解

$$\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha.$$

Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 由 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 及 Chevalley 生

成元 e_i, f_i $(1 \leq i \leq n)$ 生成，且

$$\begin{cases} [e_i,\ f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee, & 1 \leq i,\ j \leq n; \\ [h,\ h'] = 0, & h,\ h' \in \mathfrak{h}; \\ [h,\ e_i] = \alpha_i(h)e_i, & 1 \leq i \leq n; \\ [h,\ f_i] = -\alpha_i(h)f_i, & 1 \leq i \leq n; \\ (\mathrm{ad}e_i)^{-a_{ij}}e_j \neq 0, & (\mathrm{ad}e_i)^{1-a_{ij}}e_j = 0; \\ (\mathrm{ad}f_i)^{-a_{ij}}f_j \neq 0, & (\mathrm{ad}f_i)^{1-a_{ij}}f_j = 0. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 GGCM, 则仍可定义广义 Kac-Moody 代数 (见 [44]) $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$, 满足 (5.2.1) 中除后两条性质 (因为 $-a_{ij}$ 不一定是非负整数!) 之外的其他性质.

此外, 无论是 Kac-Moody 代数, 或是广义 Kac-Moody 代数对于 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$, 下面关系成立.

$$\begin{aligned} &\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-, \\ &\mathfrak{g}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{g}'(\boldsymbol{A}) + \mathfrak{h}, \\ &\mathfrak{g}'(\boldsymbol{A}) \cap \mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}\alpha_i^\vee, \\ &C(\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})) = C(\mathfrak{g}'(\boldsymbol{A})) \\ &\quad = \{h \in \mathfrak{h} | \alpha_i(h) = 0,\ 1 \leq i \leq n\}, \\ &\dim C(\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})) = n - l. \end{aligned}$$

定义 3 对于 Π 的子集

$$\Pi_1 = \{\alpha_{i_1},\ \alpha_{i_2},\ \cdots,\ \alpha_{i_k}\}$$

称 $\mathfrak{h}$, e_i $(1 \leq i \leq n)$ 及 f_{i_j} $(1 \leq j \leq k)$ 生成的 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 子代数为 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 的 **广义抛物子代数**, 记为 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$.

特别, $\mathfrak{p}_\varnothing(\boldsymbol{A})$ 称为 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 的 **广义 Borel 子代数**, 记为 $\mathfrak{b}(\boldsymbol{A})$. $\mathfrak{p}_\Pi(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$.

定理 1 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 及其广义抛物子代数, Borel 子代数为完备李代数当且仅当 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

证 因为 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 则 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 满足 §3. 中条件 (1)~(4), $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 是完备李代数.

反之, 若 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 则 $l < n$, 于是

$$C(\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})) = C(\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})) \neq (0).$$

故 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 不是完备李代数. □

定理 2 若 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 则 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 的外导子存在.

证 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 对 $\mathfrak{h}$ 有根子空间分解

$$\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 $\Delta_1 \supseteq \Delta_+$. 于是 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 有子空间的直和分解:

$$\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A}) = \mathfrak{a} \dot{+} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}\alpha_i^\vee \dot{+} \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h},\ \dim \mathfrak{a} = n - l.$$

于是 $\mathfrak{a}$ 与 $C(\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A}))$ 同构. $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a},\ C(\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})))$ 可定义 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 的线性变换 D_φ 满足:

$$\begin{cases} D_\varphi(a) = \varphi(a), & a \in \mathfrak{a}; \\ D_\varphi(x) = 0, & x \in \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{C}\alpha_i^\vee \dot{+} \sum\limits_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha. \end{cases}$$

容易证明 D_φ 是 $\mathfrak{p}_{\Pi_1}(\boldsymbol{A})$ 的外导子. □

下面我们讨论极大秩可解 Lie 代数与 Kac-Moody 代数之间的关系.

设 S_n 是 n 个文字的对称群, 对 $\sigma \in S_n$, 将 σ 作用于 $\boldsymbol{I}_n$ 的行上, 所得矩阵记为 $\boldsymbol{T}_\sigma$, 即

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \sum_{i=1}^{n} E_{\sigma(i)\,i},$$

其中，E_{ij} 的元素满足

$$\mathrm{ent}_{kl}E_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}.$$

容易验证

(1) $\boldsymbol{T}_\sigma \boldsymbol{T}_\tau = \boldsymbol{T}_{\sigma\tau}, \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$;

(2) $\boldsymbol{T}'_\sigma = \boldsymbol{T}_{\sigma^{-1}} = \boldsymbol{T}_\sigma^{-1}, \quad \forall \sigma \in S_n$;

(3) $\mathrm{ent}_{\sigma(i)\sigma(j)}\boldsymbol{T}_\sigma \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}'_\sigma = \mathrm{ent}_{ij}\boldsymbol{A}$.

定义 4 两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 称为 S_n 等价的，若有 $\sigma \in S_n$，使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}_\sigma \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}'_\sigma.$$

显然，若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{S}_n$ 等价的广义 Cartan 矩阵，则它们决定的 Kac-Moody 代数是同构的.

设 $\mathfrak{n}$ 是秩为 n 的极大秩幂零 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面，$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 $\mathfrak{h}$-msg 与根 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 相对应. 因为 $\mathfrak{n}$ 是幂零的，对 $x_i, x_j, i \neq j$、$\exists a_{ij} \in \mathbf{Z}_-$ 使得

$$(\mathrm{ad}x_i)^{-a_{ij}}x_j \neq 0, \ (\mathrm{ad}x_i)^{-a_{ij}+1}x_j = 0.$$

显然 $a_{ij} = 0$ 当且仅当 $a_{ji} = 0$. 再设 $a_{ii} = 2, \ 1 \leq i \leq n$. 则 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个广义 Cartan 矩阵.

定理 3 设 $\mathfrak{n}$ 是秩为 n 的极大秩幂零 Lie 代数，则 $\mathfrak{n}$ 在 S_n 等价意义下决定唯一一个广义 Cartan 矩阵.

证 我们只要证明此广义 Cartan 矩阵与极大环面及其对应的极小生成元组的选取无关.

设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面，于是有

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{n}_\alpha.$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 都是 $\mathfrak{h}$-msg，因而 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $L(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 都是和 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ 同构的 $\mathfrak{h}$ 模. 设它们的权系为

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}.$$

注意到 $\dim \mathfrak{n}_{\alpha_i}=1$, 因而有 $\sigma\in S_n$, 使得

$$y_i=\lambda_i x_{\sigma(i)},\ 1\le i\le n.$$

于是 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 和 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 决定的广义 Cartan 矩阵是 S_n 等价的.

又设 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 都是 $\mathfrak{n}$ 上极大环面, 由定理 2.4.9 知有 $\theta\in \mathrm{Aut}\mathfrak{n}$, 使得

$$\mathfrak{h}_2=\theta\mathfrak{h}_1\theta^{-1}.$$

若 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是 $\mathfrak{h}_1$-msg, 则 $\theta(x_1)$, $\theta(x_2)$, $\cdots$, $\theta(x_n)$ 是 $\mathfrak{h}_2$-msg. $\mathfrak{n}$ 决定的广义 Cartan 矩阵与 $\mathfrak{n}$ 上的极大环面选取无关. □

设极大秩幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 的幂零度为 p (即 $\mathfrak{n}^{p-1}\neq 0$, 而 $\mathfrak{n}^p=0$), 对应的广义 Cartan 矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 生成的 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 有分解:

$$\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}_++\mathfrak{n}_-,$$

其中

$$\mathfrak{n}_\pm=\sum_{\alpha\in\Delta_\pm}\mathfrak{g}_\alpha.$$

$\mathfrak{n}_+$ 由 e_1, e_2, $\cdots$, e_n 生成, 生成关系为

$$(\mathrm{ad}e_i)^{-a_{ij}}e_j\neq 0,\ (\mathrm{ad}e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0.$$

于是有

$$\max\{-a_{ij}+1\}\le p.$$

如果 $\dim\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})<\infty$, 则 $p<p_{\boldsymbol{A}}$, 这里 $p_{\boldsymbol{A}}$ 是 $\mathfrak{g}(\boldsymbol{A})$ 的最高根的高度. 以 $|\alpha|$ 表示 Δ_+ 中元素 α 的高度. 注意到 $\sum\limits_{|\alpha|>p}\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{n}_+$ 的理想, $\mathfrak{n}_+$ 对其的商代数记为 $\mathfrak{m}_p(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathfrak{m}$. 记 π 为 $\mathfrak{n}_+$ 到 $\mathfrak{m}$ 的自然同态, 则 $\mathfrak{m}$ 由 $\pi(e_i)=\bar{e}_i$ $(1\le i\le n)$ 生成. 容易证明下面的结论.

(1) $\mathfrak{m}$ 也是幂零度为 p, 对应的广义 Cartan 矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的极大秩幂零李代数, $\mathfrak{m}$ 有由 $\mathfrak{n}_+$ 的阶化诱导的阶化;

(2) 对 $\sigma \in S_n$, 存在 $\bar{\sigma} \in \mathrm{Aut}\mathfrak{m}$ 使得 $\bar{\sigma}\bar{e}_i = \bar{e}_{\sigma i}$ 当且仅当 $\sigma(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$;

(3) $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的同态像, 即有 $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{m}$ 使得 $\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ 同构, 而且 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的齐次理想, $\mathfrak{m}^{p-1} \not\subset \mathfrak{a}$, $i \neq j$ 时, $(\mathrm{ad}\bar{e}_i)^{-a_{ij}}\bar{e}_j \notin \mathfrak{a}$.

(4) 令

$$\tilde{S}_n(\boldsymbol{A}) = \{\bar{\sigma} \in \mathrm{Aut}\mathfrak{m} | \sigma(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\},$$

和

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_p(\boldsymbol{A}) = \{\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{m}\},$$

其中 $\mathfrak{a}$ 满足 (3) 中条件. 则 $\mathcal{I}$ 在 $\tilde{S}_n(\boldsymbol{A})$ 下不变.

定理 4 幂零根基为幂零度 p 的对应广义 Cartan 矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的极大秩幂零李代数的可解完备李代数的同构类与 $\mathcal{I}_p(\boldsymbol{A})$ 在 $\tilde{S}_n(\boldsymbol{A})$ 作用下的轨道有一一对应.

证 由 §4.3 与 [42] 中定理 5.10 可得此定理. □

§5.3 具有交换幂零根基的完备李代数

本节我们给出幂零根基为交换李代数的完备李代数的分类定理.

设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$$

是一个有限维复完备李代数, 其中 $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根基, 幂零根基, $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a}$ 是约化李代数.

在本节中总是假定 $\mathfrak{n}$ 是交换的. 于是 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{s}$ 模, 如同以前, 令 $\mathfrak{r}_n$ 是非平凡 $\mathfrak{s}$ 子模的和, $\mathfrak{r}_0$ 为平凡 $\mathfrak{s}$ 子模的和.

又 $\mathfrak{n}$ 是完全可约 $\mathfrak{m}$ 模, 分别以 $\mathfrak{u}_n$ 与 $\mathfrak{u}_0$ 表示非平凡 $\mathfrak{m}$ 子模的和与平凡 $\mathfrak{m}$ 子模的和.

引理 1 假设 $\mathfrak{g}$ 如上, 且 $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = (0)$. 则有以下结果.

(1) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_n \subseteq \mathfrak{n}$.

(2) $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_n + (\mathfrak{r}_0 \cap \mathfrak{n})$.

(3) $\mathfrak{u}_0 = (0)$, $\mathfrak{u}_n = \mathfrak{n}$.

(4) $\mathfrak{g}$ 的幂零根基与 nil 根基相同, 均为 $\mathfrak{n}$.

证 (1) 由于 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}] = (0)$, $\mathfrak{r}_n = [\mathfrak{s}, \mathfrak{a}+\mathfrak{n}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$, 故 (1) 成立.

(2) 由 $\mathfrak{s}$- 模的完全可约性及 (1) 知 (2) 成立.

(3) 由 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{u}_0] = (0)$, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{u}_0] = (0)$ 及 $C(\mathfrak{g}) = (0)$ 知 (3) 成立.

(4) 从 (3) 知 $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_n = [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$, 而

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] &= [\mathfrak{m}+\mathfrak{n}, \mathfrak{n}+\mathfrak{a}] \\ &= [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{a}] \\ &= [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] \\ &= \mathfrak{n}.\end{aligned}$$

因而 (4) 成立. □

引理 2 假设 $\mathfrak{g}$ 如上, 且 $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = (0)$. 再令

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_1 &= C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{r}_n), \\ \mathfrak{a}_2 &= C_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{r}_0).\end{aligned}$$

则有以下结果.

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \dot{+} \mathfrak{a}_2$.

(2) $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}_1 \dot{+} (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{r}_0)$ 与 $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{s} + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{n}$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的理想.

(3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

证 1) 由定理 2.4.2 知

$$\begin{aligned}[\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_n] &\subseteq \mathfrak{r}_n, \\ [\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_0 \cap \mathfrak{n}] &\subseteq \mathfrak{r}_0 \cap \mathfrak{n}.\end{aligned}$$

又设 $a \in \mathfrak{a}$. 令 A_1, $A_2 \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ 满足

$$A_1(x) = \begin{cases} 0, 当, & x \in \mathfrak{m} + \mathfrak{r}_n; \\ [a, x], 当, & x \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{r}_0; \end{cases} \tag{5.3.1}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0, 当, & x \in \mathfrak{s} + \mathfrak{r}_0; \\ [a, x], 当, & x \in \mathfrak{r}_0. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

容易证明, A_1, $A_2 \in \operatorname{Der}\mathfrak{g} = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$. 又 $\mathfrak{g}$ 是完备的, 故有唯一的 a_1, $a_2 \in \mathfrak{g}$ 使得 $\operatorname{ad}a_1 = A_1$, $\operatorname{ad}a_2 = A_2$. 显然 $\operatorname{ad}a = A_1 + A_2$, 于是 $a = a_1 + a_2$. 再由

$$[a_i, \mathfrak{a}] = A_i(\mathfrak{a}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

A_1, A_2 都是半单线性变换, 故 a_1, $a_2 \in \mathfrak{a}$. 从 (5.3.1), (5.3.2) 知, $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2$. 又 $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \subseteq C(\mathfrak{g}) = (0)$. 故此 (1) 成立.

(2) 由定理 2.4.2 及 $\mathfrak{n}$ 为理想知

$$[\mathfrak{r}_0, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{n} \cap \mathfrak{r}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1,$$

又

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{g}_1] = (0).$$

因此 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 不难证明

$$\mathfrak{g}_2 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1).$$

于是 $\mathfrak{g}_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. (2) 成立.

(3) 很显然我们有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ 及 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = (0)$. 因此 (3) 成立. □

推论 假定如上, 则

$$\mathfrak{g}_1 = C_{\mathfrak{r}_0}(\mathfrak{r}_n),$$
$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}_n + C(\mathfrak{r}_0).$$

只要注意到 $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} + (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{r}_0)$, 就可得此推论. □

从上面的讨论我们可以看到，带有交换幂零根基的完备李代数 $\mathfrak{g}$ 分为 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 两部分. 这两部分的幂零根基仍然是交换的，但前者是极大秩的可解完备李代数，后者的幂零根基是 Levi 子代数的非平凡的不可约子表示的直和，即

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_n = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{s},\ \mathfrak{n}].$$

定理 3 设 $\mathfrak{g}$ 是可解完备李代数，且其幂零根基交换，则 $\mathfrak{g}$ 为 2 维单完备李代数的直和.

证 由于 $\mathfrak{g}$ 可解，故

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}.$$

又 $\mathfrak{n}$ 交换，故 $\mathrm{Der}\mathfrak{n} = gl(\mathfrak{n})$. $\mathfrak{n}$ 上的极大环面 $\mathfrak{a}$ 是 $gl(\mathfrak{n})$ 的 Cartan 子代数，因此定理成立. □

定理 4 设

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{s}_i \dot{+} \mathfrak{a}_i \dot{+} \mathfrak{n}_i, \quad i = 1,\ 2$$

是两个带有交换幂零根基的完备李代数. 则 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构当且仅当 $\mathfrak{s}_1$ 与 $\mathfrak{s}_2$ 同构，而且 $\mathfrak{s}_1$ 模 $\mathfrak{n}_1$ 与 $\mathfrak{s}_2$ 模 $\mathfrak{n}_2$ 同构.

证 这是定理 2.4.9 的直接结果. □

推论 设 $\mathfrak{g}$ 是带有交换幂零根基 $\mathfrak{n}$ 的完备李代数，且 $\mathfrak{r}_n = \mathfrak{n}$. $\mathfrak{n}$ 作为 $\mathfrak{s}$- 模有不可约子模分解如下：

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_1 \dot{+} \mathfrak{r}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathfrak{r}_t.$$

则

$$\dim \mathfrak{a} = t.$$

证 由本定理知所有带有交换幂零根基的完备李代数均可用 §3.5 的方法造出. 因此推论成立. □

定理 5 设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}$$

是非单的单完备李代数，$\mathfrak{n}$ 是不可约 $\mathfrak{s}$ 模，则有以下结果.

(1) $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = (0)$.

(2) $\dim \mathfrak{a} = 1$.

证 因为 $\mathfrak{n}$ 是幂零的，所以

$$(0) \subseteq \mathfrak{n}^{(1)} \subset \mathfrak{n}.$$

$\mathfrak{n}^{(1)}$, $\mathfrak{n}$ 都是 $\mathfrak{s}$ 模，再由 $\mathfrak{n}$ 的不可约性得 $\mathfrak{n}^{(1)} = (0)$. 即 (1) 成立，进而 (2) 成立. □

定理 6 设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{n}$$

是带有交换幂零根基的完备李代数，而且满足 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$; $\mathfrak{s}$ 是单李代数. 则 $\mathfrak{g}$ 是单完备李代数.

证 设 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

由于 $\mathfrak{s}$ 为单李代数, 故在而且仅在 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 中之一. 不妨设 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}_1$. 于是

$$\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}_1.$$

因此 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}$ 同构，$\mathfrak{g}_2 = (0)$. 故此 $\mathfrak{g}$ 是单完备的. □

注 证明中并未用到 $\mathfrak{n}$ 的交换性.

§5.4 完备李代数与 Heisenberg 代数

本节我们讨论 Heisenberg 代数与完备李代数的一些关系. 在 §3.5 中，我们构造的完备李代数的幂零根基中包含有 Heisenberg 代数，但当时并未仔细讨论.

设 $\mathcal{H}$ 是一个 Heisenberg 代数，即有：

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = C(\mathcal{H}), \dim C(\mathcal{H}) = 1.$$

设 $c \in C(\mathcal{H})$, $c \neq 0$. 于是有 $\mathcal{H}$ 上的秩为 $\dim \mathcal{H} - 1$ 的反对称双线性函数 ψ 使得

$$[x, y] = \psi(x, y)c, \ \forall x, y \in \mathcal{H}. \tag{5.4.1}$$

由此可知

$$\dim \mathcal{H} - 1 = 2n, \tag{5.4.2}$$

是偶数，而且在 $\mathcal{H}$ 中有基 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n, c$ 使得 $\forall 1 \leq i, j \leq n; x \in \mathcal{H}$ 有

$$\psi(x_i, x_j) = \psi(y_i, y_j) = \psi(c, x) = 0, \quad \psi(x_i, y_j) = \delta_{ij}.$$

或者

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [c, x] = 0, \quad [x_i, y_j] = \delta_{ij}c.$$

以 Ψ 表示 ψ 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n, c$ 下的矩阵，则

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 1 设 $\mathcal{H}$ 是 Heisenberg 代数. 则 $\mathrm{Der}\mathcal{H}$ 是单完备李代数，并有以下分解：

$$\mathrm{Der}\mathcal{H} = \mathfrak{s} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{n}, \tag{5.4.3}$$

这里 $\mathfrak{s} \simeq sp(2n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{n} = \mathrm{ad}\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}/\mathbf{C}c$ 是不可约 $\mathfrak{s}$ 模, $\dim \mathfrak{a} = 1$.

证 $D \in gl(\mathcal{H})$ 满足

$$D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy]$$

当且仅当

$$\psi(x, y)Dc = (\psi(Dx, y) + \psi(x, Dy))c.$$

所以 $Dc = \lambda c$. 我们仍以 D 表示其在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n, c$ 下的矩阵. $D \in \mathrm{Der}\mathcal{H}$ 当且仅当

$$\lambda\Psi = D'\Psi + \Psi D.$$

于是

$$D=\begin{pmatrix} M & N & 0 \\ P & -M'+\lambda I_n & 0 \\ B_1 & B_2 & \lambda \end{pmatrix},$$

这里 $N'=N$, $P'=P$. 令

$$\mathfrak{s}=\left\{\begin{pmatrix} M & N & 0 \\ P & -M' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\middle| N'=N,\ P'=P\right\},$$

$$\mathfrak{a}=\mathbf{C}I_0,\quad \text{这里 } I_0=\mathrm{diag}(I_n\ I_n\ 2),$$

$$\mathfrak{n}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

由此容易得知 (5.4.3) 成立. 于是 Der$\mathcal{H}$ 是完备李代数, 再由 $\mathfrak{s}$ 是单李代数, $\mathfrak{n}$ 是单 $\mathfrak{s}$ 模, 于是 Der$\mathcal{H}$ 是单完备李代数, 于是定理成立. □

推论 设 V 是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 生成的 $\mathcal{H}$ 的子空间, 则 V 是 $\mathfrak{s}$ 模, 且 ad 是 V 到 $\mathfrak{n}$ 的模同构映射.

这是很明显的事实.

定理 2 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ 的全形 $\mathcal{L}$ 的中心为零, 但不是完备李代数.

证 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ 的全形 $\mathcal{L}$ 有空间直和分解:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\mathrm{Der}\mathcal{H}\dot{+}\mathcal{H}\\&=\mathrm{Der}\mathcal{H}\dot{+}V\dot{+}\mathbf{C}c\\&=\mathfrak{s}\dot{+}\mathfrak{a}\dot{+}\mathfrak{n}\dot{+}V\dot{+}\mathbf{C}c.\end{aligned}$$

由于 V 与 $\mathfrak{n}$ 是单李代数 $\mathfrak{s}$ 的单模, 且

$$[\mathfrak{a},\ \mathbf{C}c]=\mathbf{C}c,$$

于是 $\mathcal{L}$ 的中心为零.

定义 $\mathcal{L}$ 的线性变换 D_0 满足如下条件:

$$D_0(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\in \mathrm{Der}\mathcal{H};\\ 2c, & 若\ x=c;\\ 2x-\mathrm{ad}x, & 若\ x\in V.\end{cases}$$

由于 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{L}$ 的理想, 而

$$D_0(\mathcal{H})\not\subseteq\mathcal{H},$$

故 D_0 不可能是 $\mathcal{L}$ 的内导子.

设

$$a_i=D_i+\mathrm{ad}z_i+v_i+k_ic,\quad i=1,\ 2,$$

其中 $D_i\in\mathfrak{s}+\mathfrak{a}$, $z_i,v_i\in V$, $k_1,k_2\in\mathbf{C}$. 于是有 $\lambda_i\in\mathbf{C}$ 使得

$$[D_i,c]=D_i(c)=\lambda_ic,\ i=1,\ 2.$$

此时

$$\begin{aligned}&[a_1,\ a_2]\\=&[D_1,\ D_2]+\mathrm{ad}(D_1z_2)-\mathrm{ad}(D_2z_1)\\&+D_1v_2-D_2v_1+\lambda_0c,\end{aligned}$$

其中

$$\lambda_0=\lambda_1k_2-\lambda_2k_1+\psi(v_1,v_2)+\psi(z_1,v_2)-\psi(z_2,v_1).$$

于是

$$D_0([a_1,a_2])=2D_1v_2-\mathrm{ad}(D_1v_2)-2D_2v_1+\mathrm{ad}(D_2v_1)+2\lambda_0c.$$

另一方面，不难求得

$$
\begin{aligned}
&[D_0(a_1),\ a_2] \\
=& -2D_2v_1 + \mathrm{ad}(D_2v_1) \\
&+(\psi(v_1, v_2) - 2\lambda_2 k_1 - 2\psi(z_2, v_1))c; \\
&[a_1,\ D_0(a_2)] \\
=& \ 2D_1v_2 - \mathrm{ad}(D_1v_2) \\
&+(\psi(v_1, v_2) + 2\lambda_1 k_2 + 2\psi(z_1, v_2))c.
\end{aligned}
$$

因此

$$D_0([a_1,\ a_2]) = [D_0(a_1),\ a_2] + [a_1,\ D_0(a_2)].$$

因而 D_0 是 $\mathcal{L}$ 的外导子，故 $\mathcal{L}$ 不是完备李代数. □

令

$$
\begin{aligned}
&U_1 = \{2x - \mathrm{ad}x | x \in V\}, \\
&U_2 = \{\mathrm{ad}x | x \in V\}, \\
&\mathfrak{u} = U_1 + U_2 + \mathbf{C}c, \\
&\mathfrak{m} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a}.
\end{aligned}
$$

于是

$$\mathcal{L} = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{u}.$$

而且

$$
\begin{aligned}
&[\mathfrak{m}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{u}, \\
&[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = C(\mathfrak{u}) = \mathbf{C}c.
\end{aligned}
$$

不难看出，$\mathfrak{m}$ 是约化李代数，U_1, U_2 是同构的单 $\mathfrak{s}$ 模，也是同构的单 $\mathfrak{m}$ 模；$\mathbf{C}c$ 是 1 维 $\mathfrak{s}$ 模，因而是平凡的；但 $\mathbf{C}c$ 是非平凡的 1 维 $\mathfrak{m}$ 模. 还可得到 $\mathfrak{u}$ 是 $4n+1$ 维的 Heisenberg 代数，它既是 $\mathcal{L}$ 的幂零根基，也是 nil 根基.

由于 D_0 是 $\mathcal{L}$ 的导子，故可定义 $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \mathbf{C}D_0$ 为李代数. $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} + \mathbf{C}D_0$ 是其约化子代数. $\mathfrak{u}$ 既是 $\mathcal{L}_1$ 的幂零根基，也是 nil 根基. U_1, U_2 是不同构的单 $\mathfrak{m}_1$ 模. 再从 $\mathfrak{s}$ 是单李代数，可以得到 $\mathcal{L}_1$ 是单完备李代数.

定理 3 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ 的全形 $\mathcal{L}$ 的导子代数 $\mathrm{Der}\mathcal{L}$ 是单完备李代数.

证 如能证明

$$\mathrm{Der}\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \tag{5.4.4}$$

则由上面的讨论，知定理成立. 设 $\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 子代数，则

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$$

为 $\mathcal{L}$ 的 Cartan 子代数. 设 $\mathcal{L}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathcal{L} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathcal{L}_\alpha,$$

则

$$\dim \mathcal{L}_\alpha = 1 \text{ 或 } 2.$$

而且

$$\dim \mathcal{L}_\alpha = 2,$$

当且仅当有 i 使得

$$\mathcal{L}_\alpha = L(x_i,\ \mathrm{ad}x_i), \tag{5.4.5}$$

即由 x_i, $\mathrm{ad}x_i$ 生成的子空间.

下面分几步证明 (5.4.4).

(1) 若 $h \in \mathfrak{h}$, 且

$$\alpha(h) = 0,\ \forall\alpha \in \Delta,$$

则 $h = 0$.

因为，此时 $h \in C(\mathcal{L}) = (0)$.

(2) 设 $D \in \mathrm{Der}\mathcal{L}$. 则有 $l \in \mathcal{L}$, 使得

$$(D - \mathrm{ad}l)(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}.$$

事实上, 设 $h \in \mathfrak{h}$, 而

$$D(h) = h' + \sum_{\alpha \in \Delta} y_\alpha(h),$$

这里 $h' \in \mathfrak{h}$, $y_\alpha(h) \in \mathcal{L}_\alpha$. 若 $y_\alpha(h) \neq 0$, 因为

$$[h,\ h_1] = 0,\quad \forall\, h_1 \in \mathfrak{h},$$

所以我们有

$$\alpha(h_1) y_\alpha(h) = \alpha(h) y_\alpha(h_1),\ \ \alpha \in \Delta,\ \ h,\ h_1 \in \mathfrak{h}.$$

取 h_1 使得 $\alpha(h_1) \neq 0$, 则 $\alpha(h) \neq 0$. 取

$$x_\alpha = \frac{1}{\alpha(h)} y_\alpha(h).$$

而且

$$\begin{aligned} y_\alpha(h_1) &= \alpha(h_1) \frac{1}{\alpha(h)} y_\alpha(h) \\ &= \alpha(h_1) x_\alpha. \end{aligned}$$

因此

$$D(h) = h' + \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h) x_\alpha,$$

这里 x_α 与 h 无关. 令 $l = -\sum\limits_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$, 则

$$(D - \mathrm{ad}l)(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}.$$

(3) 设 $D \in \mathrm{Der}\mathcal{L}$. 则

$$D(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$$

当且仅当 $D(\mathfrak{h}) = (0)$. 此时还有

$$D(\mathcal{L}_\alpha) \subseteq \mathcal{L}_\alpha, \ \forall \alpha \in \Delta.$$

事实上, 对 $\alpha \in \Delta$, $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$, $x_\alpha \neq 0$, 令

$$D\, e_\alpha = h_1 + \sum_{\beta \in \Delta} y_\beta,$$

这里 $h_1 \in \mathfrak{h}$, $y_\beta \in \mathcal{L}_\beta$, $\beta \in \Delta$. 于是

$$\alpha(h)(h_1 + \sum_{\beta \in \Delta} y_\beta) = \alpha(D\, h) x_\alpha + \sum_{\beta \in \Delta} \beta(h) y_\beta.$$

所以

$$\alpha(Dh) = 0, \ \forall\, \alpha \in \Delta.$$

因此 $D(h) = 0$, $D(x_\alpha) = y_\alpha$.

(4) 设 $D \in \mathrm{Der}\mathcal{L}$, 且 $D(\mathfrak{h}) = (0)$. 则有 $h_0 \in \mathfrak{h}_0$, 使得

$$\begin{aligned}
&(D - \mathrm{ad}h_0)(\mathfrak{m}) = (0);\\
&(D - \mathrm{ad}h_0)(\mathbf{C}c) \subseteq \mathbf{C}c;\\
&(D - \mathrm{ad}h_0)(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u}.
\end{aligned}$$

由 (3) 有

$$D(\mathfrak{s}) = (0); \ D(\mathbf{C}c) \subseteq \mathbf{C}c; \ D(\mathfrak{u}) \subseteq \mathfrak{u}.$$

于是 $D|_\mathfrak{s}$ 是单李代数 $\mathfrak{s}$ 的导子, 又 $D(\mathfrak{h}_0) = (0)$, 于是有 $h_0 \in \mathfrak{h}_0$ 使得 D-$\mathrm{ad}h_0$ 满足所述性质.

(5) 设 $D \in \mathrm{Der}\mathcal{L}$, 且 $D(\mathfrak{m}) = (0)$. 则有

$$\begin{aligned} D(x) &= \lambda_1 x + \lambda_2 \mathrm{ad}x, \quad x \in V; \\ D(\mathrm{ad}x) &= \mu \mathrm{ad}x, \quad x \in V. \end{aligned}$$

因为 $D(\mathfrak{m}) = (0)$, 所以 $D(V)$ 和 $D(\mathfrak{n})$ 是同构的单 $\mathfrak{m}$ 模, 于是 $D(V)$ 和 $D(\mathfrak{n})$ 是平凡的, 或者是与 V 同构的单 $\mathfrak{m}$ 模. 再由 (5.4.5), 可得

$$\begin{aligned} D(x) &= \lambda_1 x + \lambda_2 \mathrm{ad}x, \quad x \in V; \\ D(\mathrm{ad}x) &= \mu_1 x + \mu \mathrm{ad}x, \quad x \in V. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &= D([\mathrm{ad}x,\ \mathrm{ad}y]) \\ &= [\mu_1 x + \mu \mathrm{ad}x,\ \mathrm{ad}y] + [\mathrm{ad}x,\ \mu_1 y + \mu \mathrm{ad}y] \\ &= 2\mu_1 \psi(x,\ y)c, \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

因而 $\mu_1 = 0$.

(6) 设 $D \in \mathrm{Der}\mathcal{L}$, 且 $D(\mathfrak{m}) = (0)$,

$$\begin{aligned} D(x) &= \lambda x, \quad x \in V; \\ D(\mathrm{ad}x) &= \mu \mathrm{ad}x, \quad x \in V. \end{aligned}$$

则 $\lambda = \mu$, $D = \lambda I_0 \in \mathcal{L}_1$.

在等式

$$[x, y] = [\mathrm{ad}x,\ y]$$

的两边以 D 作用, 得

$$2\lambda\psi(x, y)c = (\mu + \lambda)\psi(x, y)c.$$

由此知 (6) 成立.

(7) 最后, 证明 (5.4.4) 成立. 显然

$$\mathcal{L}_1 \subseteq \mathrm{Der}\mathcal{L}.$$

若 $D_1 \in \mathrm{Der}\mathcal{L}$, 从上面的讨论知, 有 $D_2 \in \mathrm{ad}\mathcal{L}$, 使得 $D = D_1 - D_2$ 满足 (5) 中条件. 于是

$$(D + \lambda_2 D_0)(x) = (\lambda_1 + 2\lambda_2)x,$$
$$(D + \lambda_2 D_0)(\mathrm{ad}x) = \mu \mathrm{ad}x.$$

由 (6), 有

$$D + \lambda_2 D_0 = \mu I_0 \in \mathcal{L}_1.$$

所以 (5.4.4) 成立. 故 $\mathrm{Der}\mathcal{L}$ 是单完备李代数. □

§5.5 实完备李代数

设 $\mathfrak{g}_0$ 是实李代数. 在实向量空间 $\mathfrak{g}_0$ 的复化

$$\mathfrak{g}_0^C = \{x + \sqrt{-1}y | x, y \in \mathfrak{g}_0\}$$

中定义

$$[x_1 + \sqrt{-1}y_1, x_2 + \sqrt{-1}y_2]$$
$$= [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + \sqrt{-1}([y_1, x_2] + [x_1, y_2]).$$

容易证明 $\mathfrak{g}_0^C$ 是一个复李代数, 而且它在 $\mathfrak{g}_0$ 上与原来的李代数结构一致, 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的 **复化**.

反之, 若 $\mathfrak{g}$ 是复李代数, 亦可看成实李代数, 以 $\mathfrak{g}^R$ 表示之. 如果存在 $\mathfrak{g}^R$ 的子代数 $\mathfrak{g}_0$ 使得

$$\mathfrak{g}_0^C = \mathfrak{g},$$

则称 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 **实形式**.

定义 1 设 $\mathfrak{g}_0$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 即

$$\mathfrak{g} = \{x + \sqrt{-1}y | x, y \in \mathfrak{g}_0\}.$$

$\mathfrak{g}$ 中由

$$\sigma(x + \sqrt{-1}y) = x - \sqrt{-1}y$$

定义的映射 σ 称为由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的 **共轭**.

显然, σ 满足下面四个条件.

(1) $\sigma^2(x)=x$;

(2) $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$;

(3) $\sigma(\alpha x)=\bar{\alpha}\sigma(x)$;

(4) $\sigma([x,\ y])=[\sigma(x),\ \sigma(y)]$,

$\forall x,\ y\in\mathfrak{g}$, $\alpha\in\mathbf{C}$. $\bar{\alpha}$ 是 α 的共轭复数.

定义 2 复李代数 $\mathfrak{g}$ 中一个到自身的映射 σ, 若满足条件 (1)～ (4), 则称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 **半对合**.

引理 1 若复李代数 $\mathfrak{g}$ 有一个半对合 σ, 则

$$\mathfrak{g}_0=\{x|\sigma(x)=x\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式, 而且由 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭就是 σ.

证 由于对任何 $x,\ y\in\mathfrak{g}_0$, $\lambda,\ \mu\in\mathbf{R}$, 有 $\sigma(\lambda x+\mu y)=\lambda x+\mu y\in\mathfrak{g}_0$ 及 $\sigma([x,\ y])=[\sigma(x),\ \sigma(y)]=[x,\ y]\in\mathfrak{g}_0$, 因此 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数.

其次, 证明

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\sqrt{-1}\mathfrak{g}_0,$$
$$\mathfrak{g}_0\cap\sqrt{-1}\mathfrak{g}_0=(0).$$

事实上, $\forall z\in\mathfrak{g}$, 有

$$\sigma(\sigma(z)+z)=\sigma(z)+z,$$
$$\sigma(-\sqrt{-1}(z-\sigma(z)))=-\sqrt{-1}(z-\sigma(z)).$$

故

$$\frac{1}{2}(z+\sigma(z)),\ \frac{-\sqrt{-1}}{2}(z-\sigma(z))\in\mathfrak{g}_0.$$

而

$$z=\frac{1}{2}(z+\sigma(z))+\sqrt{-1}\left(\frac{-\sqrt{-1}}{2}(z-\sigma(z))\right),$$

即

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0.$$

又若 $x \in \mathfrak{g}_0 \cap \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$, 则由 $x \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$, 存在 $x_0 \in \mathfrak{g}_0$ 使得 $x = \sqrt{-1}x_0$. $x \in \mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x) = x$. $x_0 \in \mathfrak{g}_0$, 则 $\sigma(x) = \sigma(\sqrt{-1}x_0) = -\sqrt{-1}x_0 = -x$. 故 $x = 0$.

由此知 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 显然 $\mathfrak{g}_0$ 决定的共轭恰为 σ. □

不难看出,

$$\sqrt{-1}\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} | \sigma(x) = -x\}.$$

定理 2 实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 完备, 当且仅当其复化 $\mathfrak{g}$ 完备.

证 设 σ 是 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{g}_0$ 的共轭. 显然 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$ 的复化恰为 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$.

其次, 若 $x \in C(\mathfrak{g}_0)$, 则 $[x, \mathfrak{g}] = 0$. 因而 $C(\mathfrak{g}_0)$ 的复化在 $C(\mathfrak{g})$ 中. 反之, 设 $x \in C(\mathfrak{g})$, 于是 $[\sigma(x), \mathfrak{g}] = 0$. 又

$$x = \frac{1}{2}(x + \sigma(x)) + \sqrt{-1}\frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - \sigma(x)).$$

显然

$$\frac{1}{2}(x + \sigma(x)), \sqrt{-1}\frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - \sigma(x)) \in C(\mathfrak{g}_0).$$

于是 $C(\mathfrak{g}_0)$ 的复化为 $C(\mathfrak{g})$.

再次, $\mathfrak{g}_0$ 的导子, 可自然地扩充为 $\mathfrak{g}$ 的线性变换, 而且容易证明扩充后为 $\mathfrak{g}$ 的导子. 反之, 设 D 是 $\mathfrak{g}$ 的导子, 令

$$D_1 = \frac{1}{2}(D + \sigma D\sigma),\ D_2 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(D - \sigma D\sigma).$$

容易验证 $\sigma D_i\sigma = D_i$ $(i = 1, 2)$, $x \in \mathfrak{g}_0$.

$$\sigma D_i(x) = \sigma D_i\sigma(x) = D_i(x),\ i = 1, 2.$$

因此 D_i 在 $\mathfrak{g}_0$ 上限制为其线性变换. 由

$$\sigma D\sigma([x,\ y]) = [\sigma D\sigma(x),\ y] + [x,\ \sigma D\sigma(y)],$$

可将 D_i 视为 $\mathfrak{g}_0$ 的导子. 注意到

$$D = D_1 + \sqrt{-1}D_2.$$

于是 D 在 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}_0$ 的复化中.

综合上面讨论, 可得

$$\begin{cases} (\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0)^C = \mathrm{ad}\mathfrak{g}; \\ (C(\mathfrak{g}_0))^C = C(\mathfrak{g}); \\ (\mathrm{Der}\mathfrak{g}_0)^C = \mathrm{Der}\mathfrak{g}. \end{cases}$$

因而 $\mathfrak{g}_0$ 完备, 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 完备. □

定理 3 若实完备李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化 $\mathfrak{g}$ 是单完备的, 则 $\mathfrak{g}_0$ 也是单完备的.

证 只要注意到: (1) 一个实李代数可分解为非平凡理想之和, 则其复化也可分解为非平凡理想之和; (2) 单完备李代数是不可分解的, 因此定理成立. □

注 一般, 若 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上李代数, $\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{F}$ 的扩域. 则可视

$$\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{F}} \mathfrak{g}$$

为 $\mathbf{E}$ 上的李代数. 可以证明 $\mathfrak{g}$ 完备, 当且仅当 $\mathbf{E}$ 上李代数 $\mathbf{E}\otimes_{\mathbf{F}}\mathfrak{g}$ 完备; 而且, 当后者为单完备李代数时, 前者必为单完备李代数.

引理 4 设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化, σ 为对应的共轭, 又 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想), 且满足

$$\sigma(\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathfrak{g}_1.$$

则

$$(\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g})^C = \mathfrak{g}_1,$$

且 $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 (理想).

证 显然

$$(\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g})^C\subseteq\mathfrak{g}_1.$$

设 $x\in\mathfrak{g}_1$, 于是 $\sigma(x)\in\mathfrak{g}_1$. 容易验证

$$\frac{1}{2}(x+\sigma(x)),\ \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x-\sigma(x))\in(\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}).$$

于是 $x\in(\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g})^C$. 因此

$$(\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g})^C=\mathfrak{g}_1.$$

可直接证明 $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数 (理想). □

引理 5 设 $\mathfrak{g}$ 是实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化, σ 为对应的共轭. 则有以下结果:

(1) $\mathrm{ad}\sigma(x)=\sigma\mathrm{ad}x\,\sigma$.

(2) $\sigma D\sigma\in\mathrm{Der}\mathfrak{g},\ \forall D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$.

(3) $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想). 则 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想).

证 (1) 因为

$$[\sigma(x),\ \sigma(y)]=\sigma([x,\ y]),$$

所以 (1) 成立.

(2) $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$, 有

$$\sigma D\sigma(\alpha x+\beta y)=\alpha(\sigma D\sigma(x))+\beta(\sigma D\sigma(y)),$$
$$\sigma D\sigma([x,\ y])=[\sigma D\sigma(x),\ y]+[x,\ \sigma D\sigma(y)].$$

于是 (2) 成立.

(3) 注意到 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 再由

$$[\sigma(x),\ \sigma(y)]=\sigma([x,\ y]),$$

及

$$[x,\ \sigma(y)] = \sigma([\sigma(x),\ y])$$

知 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 (理想). □

定理 6 设实单完备李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化 $\mathfrak{g}$ 不是单完备的. 又 σ 为 $\mathfrak{g}$ 对应的共轭. 则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1),$$

其中 $\mathfrak{g}_1, \sigma(\mathfrak{g}_1)$ 都是单完备的.

证 因为 $\mathfrak{g}$ 是完备, 但不是单完备的, 于是有真单完备理想 $\mathfrak{g}_1$. 由引理 4, $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 也是理想. 不难证明

$$\begin{aligned}
&C(\sigma(\mathfrak{g}_1)) = \sigma(C(\mathfrak{g}_1),\\
&\mathrm{ad}\sigma(\mathfrak{g}_1) = \sigma(\mathrm{ad}\mathfrak{g}_1)\sigma,\\
&\mathrm{Der}\sigma(\mathfrak{g}_1) = \sigma(\mathrm{Der}\mathfrak{g}_1)\sigma,\\
&\sigma(\mathfrak{g}_1)\ \text{不可分解}.
\end{aligned}$$

因此 $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的单完备理想. 由完备李代数分解唯一性定理, 知

$$\mathfrak{g}_1 = \sigma(\mathfrak{g}_1),$$

或

$$\mathfrak{g}_1 \cap \sigma(\mathfrak{g}_1) = (0).$$

若为前者, 则 $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的真完备理想, 这与 $\mathfrak{g}_0$ 是单完备的矛盾. 因而只能是后者. 此时

$$\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{g}_1 + \sigma(\mathfrak{g}_1))$$

是 $\mathfrak{g}_0$ 的完备理想, 故为 $\mathfrak{g}_0$. 于是定理成立. □

参 考 文 献

[1] 姜翠波，孟道骥，具有交换幂零根基的单完备李代数，烟台师范学院学报， 11(1995), 3, 1~4.

[2] 姜翠波，孟道骥，幂零根基为 Heisenberg 代数完备李代数的结构和实现，科学通报， 42(1997), 419~422.

[3] 姜翠波,孟道骥,某些完备李代数的结构,数学学报，41(1998), 267~274.

[4] 孟道骥，完备 Lie 代数，南开大学学报， (1985), 2, 9~19.

[5] 孟道骥,完备 Lie 代数分解的唯一性,南开大学学报，(1990), 3, 23~26.

[6] 孟道骥，中心为零的李代数的导子代数，南开大学学报， (1990)，4, 84~87.

[7] 孟道骥,具有交换幂零根基的完备李代数,数学学报，34(1991), 191~202.

[8] 孟道骥，完备 Lie 代数的极大环面子代数，数学年刊，A 辑，16(1995), 723~728.

[9] 孟道骥，完备李代数评价，科学通报， 43(1998), 1127~1130.

[10] 孟道骥，复半单李代数引论，北京大学出版社， 1998.

[11] 孟道骥，朱林生，完备 Lie 代数的若干进展，数学进展， 27(1998), 193~201.

[12] 任斌，孟道骥，可完备化幂零李代数，南开大学学报， 31(1998)，2, 64~70.

[13] 任斌，孟道骥， $\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的一个充要条件，数学学报， (1999), 43(2000), 55~60.

[14] 严志达，实半单李代数，南开大学出版社， 1998.

[15] 朱林生，孟道骥，广义 Kac-Moody 代数与无限维完备 Lie 代数，南开大学学报， 28(1995), 1, 5~10.

[16] 朱林生，孟道骥，广义 Kac-Moody 代数的导子，数学年刊， A 辑， 17(1996), 271~276.

[17] 朱林生,孟道骥,具有极大秩幂零根基的完备李代数,科学通报，43(1998), 1717~1720.

[18] 朱林生，孟道骥，一些无限维完备李代数，数学年刊 A (1999).

[19] E.Angelopoulos, Algebres de Lie satisfaisant $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})=\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, *C.R.Acad.Sci.Paris*, 306(1988), 523~525.

[20] S. Berman, On derivations of Lie algebras, *Canad. J. Math.*, 28(1976), 174~180.

[21] S.Benayadi, The perfect Lie algebras without center and outer derivations, *Annals de la Faculte des Sciences de Toulouse*, 5(1996), 203~231.

[22] N.Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1971.

[23] R.Carles, Construction des algebres de Lie completes, *C.R.Acad.Sci. Paris Ser. I.Math.*, 318(1994), 171~174.

[24] C.Chevalley, *Théorie des Groupes de Lie*, Tome Ⅲ, Hermann, Paris, 1955.

[25] R.Farnsteiner, Derivations and central extensions of finitely generated graded Lie algebras, *J.Algebra*, 118(1988), 33~45.

[26] M. Goto, Faithful representations of Lie groups I, *Mathematical Japonicae*, 1(1948), 1~13.

[27] J.E.Humphrey,*Introduction to Lie algebras and representation theorey*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972.

[28] N. Jacobson, *Lie algebras*, Wiley (Interscience), New York, 1962.

[29] Jiang, C.& Meng, D. J., Some Complete Lie Algebras, *Journal of Algebra*, to appear.

[30] Jiang, C. & Meng, D. J., The classification of complete Lie algebras with commutative nilpotent radical, *Proc. of AMS*, to appear.

[31] V.G.Kac,*Infinite dimensional Lie algebras* (3rd,ed), Cambridge Univ. Press, 1990.

[32] G. Leger, Derivations of Lie algberas III, *Duke Math. J.*, 30(1963), 637~ 645.

[33] A.I.Malcev, Solvable Lie algebra, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 9(1962), 1, 228~262.

[34] Meng, D. J., Some Results on Complete Lie Algebras, *Communications in Algebra*, 22(1994), 5457~5507.

[35] Meng, D. J., Complete Lie Algebras and HeisenbergAlgebras, *Communications in Algebra*, 22(1994), 5509~5524.

[36] Meng,D.J., Deng,S.Q., & S. Kaneyuki A Remarkable Class of Nonsymmetric Dipolarizations in Lie algebras, *Yokohama Mathematical Journal*, 43(1995), 117~123.

[37] Meng, D. J. & Wang, S. P., On the Construction of Complete Lie algebras, *Journal of Algebra*, 176(1995), 621~637.

[38] Meng, D. J. & Wang, S. P., The Killing Form and Maximal Toral Subalgebra of The Complete Lie Algebra, *Science in China (Scientia Sinica)*, 39(1996) 477~482.

[39] Meng, D. J. & Zhu, L. S., Sovable Complete Lie Algebras I, *Communications in Algebra*, to appear.

[40] Müller, D., Isometries of Bi-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups, *Geometric Dedicator*, 29(1989), 65~96.

[41] Ravisankar, T., Characteristically nilpotent algebras, *Canadian Math. J.*, 23(1971), 222~235.

[42] L.J.Santharoubane, Kac-Moody Lie algebras and the classification of nilpotent Lie algebras of maximal rank, *Canad. J. Math.* 34(1982) 1215~1239.

[43] T.Sato, The derivations of the Lie algebras. *Tohoku, Math. J.*, 23(1971), 21~36.

[44] N. Satoshi, Embedding into Kac-Moody algebras and construction of folding subalgebras for generalized Kac-Moody algebras, *Japan. J. Math.*, 18(1992), 155~171.

[45] E.V.Schenkman, A theory of subinvariant Lie algebras,*Amer. J. Math.,* 73(1951), 453~474.

[46] L.E. Stitzinger, On Lie algebras with only inner derivations, *J. of Algebras*, 105(1987), 341~343.

[47] H.Strade & R. Farnsteiner,*Modular Lie algebras and their representations*, Marcel Dekkel, INC, New York and Basel, 1988.

[48] S. Tôgô, Outer derivations of Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 128(1967), 264~276.

[49] Yang, Q. & Meng, D. J., Simple Lie algebras and complete Lie algebras, *Dongbai Xuxui*, 12(1996), 381~385.

[50] Zhu,L.S., The construction of some solvable complete Lie algebras, *J.Nanjing University Mathematical Biquarterly*, 15(1998), 1.

[51] Zhu,L.S.,Two kinds of solvable complete Lie algebras, 数学季刊, 11(1996),3, 59~66.

[52] Zhu, L.S., The classification and realization of complete Lie algebras with commutative nilpotent radicals, *Dongbai shuxue*, 14(1998), 34~40.

[53] Zhu,L.S. & Jiang, C.B.& Meng,D.J., The Splittable Lie algebras whose nilpotent radicals are Heisenberg algebras, *Advances in Mathematics (China)*, 28(1999), 284~286.

[54] Zhu,L.S.& Meng,D.J., The classification of complete Lie algebras with low dimensions, *Alg. Colloquium*, 4(1997), 95~109.

[55] Zhu,L.S.& Meng,D.J., Solvable complete Lie algebras Ⅱ, *Alg. Colloquium*, 5(1998), 289~296.

[56] Zhu,L.S.& Meng,D.J., The Splittable Lie algebras with abelian nilpotent radicals, *Advances in Mathematics (China)*, 27(1998), 474~476.

[57] Zhu,L.S.& Meng,D.J., One kind of complete Lie algebras, *Algebras, Groups and Geometries*, 17(1999), 57~72.
[58] Zhu,L.S.& Meng,D.J., A class of new nilpotent Lie algebras, *Algebras, Groups and Geometries*, 2000 (to appear).

[General Information]
书名=完备李代数
作者=孟道骥　朱林生等著
页数=129
SS号=10307067
DX号=
出版日期=2001年02月第1版
出版社=科学出版社